Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1958.

Matematik 1 (matematisk analyse).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

Vis, at der findes en i intervallet $0 < x < \infty$ to gange differentiabel funktion $\varphi(x)$, der er positiv og således beskaffen, at når $y(x)$ er en løsning i halvplanen $x > 0$ til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0\,, \tag{1}$$

da vil

$$y(x) \cdot \varphi(x) = z(x)$$

være en løsning i halvplanen $x > 0$ til differentialligningen

$$\frac{d^2z}{dx^2} + z = 0\,, \tag{2}$$

og når omvendt $z(x)$ er en løsning i halvplanen $x > 0$ til differentialligning (2), da vil

$$\frac{z(x)}{\varphi(x)} = y(x)$$

være en løsning i halvplanen $x > 0$ til differentialligning (1).

Find derved det fuldstændige integral i halvplanen $x > 0$ til differentialligning (1).

Lad P være et vendepunkt på en vilkårlig integralkurve, der forløber i området afgrænset ved ulighederne $y > 0$ og $x > \frac{1}{2}$. Vis, at tangenthældningen i P er negativ.

II.

1) Vis, at for ethvert x i intervallerne $-\pi \leqq x < 0$ og $0 < x \leqq \pi$ er

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}\,.$$

2) Vis dernæst, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \ln\cos\frac{x}{2^n} \tag{1}$$

er konvergent i intervallet $-\pi < x < \pi$, og angiv rækkens sum $f(x)$. Undersøg om rækken konvergerer ligeligt mod $f(x)$ i intervallet $-\pi < x < \pi$.

Vend!

3) Undersøg for hvilke x i intervallet $-\pi < x < \pi$ rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} \tag{2}$$

er konvergent, og gør rede for, at for sådanne x er summen netop lig med $-f'(x)$, hvor $f(x)$ er summen af rækken (1).

4) Undersøg om rækken (2) er ligelig konvergent i intervallet $-\pi < x < \pi$.

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.