Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets

matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Juni 1957.

Matematik 1 (matematisk analyse).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

Lad f(x) være en funktion, som er defineret for $x > 0$, og for hvilken det gælder, at $p \cdot f(x) \geq f(px)$ for alle x og alle hele positive tal p. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ være en følge af positive tal, som konvergerer mod 0.

Vis, at dersom $f(x) > k$ for alle x i et interval $a \leq x \leq b$, så er

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{x_n} \geq \frac{k}{b}.$$

Vis yderligere, at dersom f(x) er kontinuert for $x = x_0$, så er

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{x_n} \geq \frac{f(x_0)}{x_0}.$$

II.

Idet u er et reelt tal, skal K_u betyde den differentiable bue i XY-planen

$$y = \sin(x - u), \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x - u \leq \frac{\pi}{2}$$

Find en differentialligning af første orden, som tilfredsstilles af systemet af buer K_u, $-\infty < u < \infty$.

Bestem ligningen for den ortogonaltrajektorie T_v til det nævnte buesystem, der går gennem punktet (v,0), hvor v er et vilkårligt reelt tal.

Fortsættes på side 2.

Med u og v betegnes de to tal, for hvilke (x,y) er skæringspunktet mellem K_u og T_v . Angiv u og v som funktioner af x og y, og bevis, at området $-1 \leqq y \leqq 1$ i XY-planen herved afbildes enentydigt på et område i UV-planen, og find dette område.

Find arealet af billedområdet i UV-planen for ellipsen

$$4x^2 + y^2 \leqq 1 .$$

Tegn billedet i UV-planen af den nævnte ellipse. Det ønskes vist, at den fremkomne figur er symmetrisk om begyndelsespunktet, og billederne af ellipsens toppunkter ønskes angivet; desuden skal det undersøges, om der på randkurven findes punkter med vandrette eller lodrette tangenter, samt knæk eller spidser eller vendepunkter (koordinaterne for eventuelle sådanne punkter forlanges ikke opskrevet).