Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1956—57.

Matematik 1 (matematisk analyse).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

1) Givet en funktion $F(x, y, z, w)$ af fire variable, defineret for alle reelle værdier af disse. Idet det antages, at en reel, periodisk funktion $y = \varphi(x)$ med perioden 2π er en partikulær løsning til differentialligningen

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0, \qquad -\infty < x < +\infty,$$

skal man vise, at $y = \varphi(x)$ ligeledes tilfredsstiller differentialligningen

$$F\left(x + 2\pi, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) - F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

2) Idet $f(x) = 2\cos^2 x + x \sin(2x)$, skal man bestemme samtlige reelle, periodiske løsninger med perioden 2π til differentialligningen

$$(*) \qquad f(x)\frac{d^2y}{dx^2} - f'(x)\frac{dy}{dx} + (4\cos^2 x)\, y = 0.$$

Find derpå det ved linieelementet $(0, 0, 2)$ fastlagte partikulære integral til differentialligningen (*).

II.

1) Bevis, at afsnitsfølgen hørende til den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nv)$$

er begrænset for enhver fastholdt reel værdi af v, der ikke er et helt multiplum af 2π.

2) I den lukkede strimmel S, der i xy-planen afgrænses ved ulighederne $-1 \leqq x \leqq 1$, $-\infty < y < +\infty$, betragtes den uendelige række

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos(ny)}{n}.$$

Bestem samtlige punkter (x, y) af S, for hvilke rækken (*) er divergent. Den ved rækken (*) i resten af S fremstillede funktion betegnes i det følgende med $f(x, y)$.

Vis, at $f(x, y)$ har partielle afledede af første orden i den åbne strimmel T, der afgrænses ved ulighederne $-1 < x < 1$, $-\infty < y < +\infty$, og angiv for hver af funktionerne $x f'_x(x, y)$ og $f'_y(x, y)$ en i T gyldig rækkefremstilling.

Bestem derpå $f'_x(x, y)$ og $f'_y(x, y)$ i T ved summation af de fundne rækker. (Hertil kan benyttes formelen for summen af en uendelig kvotientrække med kompleks kvotient.)

Find sluttelig summen $f(x, y)$ af den uendelige række (*) for ethvert punkt (x, y) af S, for hvilket rækken (*) er konvergent. (Man kan begynde med at bestemme $f(x, y)$ i T og derefter anvende en sætning af Abel.)