

Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1956.

Matematik 1 (matematisk analyse).

Opgave til besvarelse i 4 timer.

1) Vis, at ligningen

$$(*) \quad x^3 + 3xy^2 - z^3 - 3z = c$$

for vilkårligt opgivne reelle værdier af x , y og c bestemmer netop een reel værdi af z .

2) Idet c tænkes fastholdt, skal man vise, at den ved ligningen (*) bestemte funktion z af x og y har kontinuerte partielle afledede af første (for øvrigt af vilkårlig) orden i hele xy -planen.

3) Bestem i tilfældet $c = 0$ det approksimerende polynomium af højst tredje grad for denne funktion i omegnen af $(0,0)$.

4) Det fremgår af det under spørgsmål 2 nævnte, at ligningen (*) for en vilkårlig fast værdi af c bestemmer en differentiabel flade F_c . Systemet af alle disse flader F_c (svarende til alle værdier $-\infty < c < +\infty$) betegnes med F . Vis, at der gennem ethvert punkt af xyz -rummet går netop een flade af systemet F .

5) Svarende til en given værdi af c betegnes med S_c systemet af kurver af størst fald (mod xy -planen) på fladen F_c , og med K systemet af kurver, der opstår ved retvinklet projektion på xy -planen af kurverne fra systemet S_c . Opstil en differentialligning til bestemmelse af systemet K , og løs denne. Angiv de fundne kurvers art. (Som det vil fremgå, er systemet K det samme for alle værdier af c .)

6) Med R betegnes systemet af rumkurver, der hver for sig har den egenskab, at kurvens tangent i et vilkårligt kurvepunkt P sammenfalder med normalen i P til den gennem P gående flade af systemet F . Opstil et sæt sammenhørende differentialligninger til bestemmelse af systemet R , og bevis, at der gennem ethvert punkt af xyz -rummet går netop een kurve af systemet R .

7) Begrund i korthed (enten ved en geometrisk betragtning eller ved at sammenholde differentialligningerne for K og for R), at systemet R ved retvinklet projektion på xy -planen går over i systemet K , (når dette sidste suppleres med det singulære punkt $(0,0)$).

8) Løs de i spørgsmål 6 omtalte sammenhørende differentialligninger for systemet R . (Man kan med fordel eliminere z .) — Ved besvarelsen af dette sidste spørgsmål forlanges ingen diskussion af gyldighedsintervaller etc., ligesom de forekommende undtagelses-tilfælde ikke ønskes taget i betragtning.

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.