Skoleembedseksamen
under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1955—56.

Matematisk analyse.

I.

I det følgende betragtes den punktmængde (flade) F, som fremstilles ved ligningen

$$x^2y - e^x z + e^{y+z} = c,$$

hvor c er en konstant.

1) For hvilke værdier af c vil F have punkter fælles med Z-aksen?

2) Idet P er et vilkårligt punkt i rummet, bestemmes c således, at F indeholder P. Gør rede for, at det er muligt at afgrænse et område omkring P således, at den del af F, som ligger indenfor området, udgør et differentiabelt fladestykke. Find det geometriske sted for de punkter P, som har den egenskab, at tangentplanen i P til det tilsvarende fladestykke er parallel med Z-aksen.

3) Bestem c således, at F indeholder punktet $Q\,(1, 0, 1)$. Vis, at skæringskurven K mellem den derved bestemte flade F og planen $z = 1$ i en omegn af Q kan bestemmes ved ligningerne $y = f(x)$, $z = 1$, hvor $f(x)$ er en vilkårlig ofte differentiabel funktion, og bestem det polynomium af anden grad, som approksimerer $f(x)$ bedst muligt i nærheden af $x = 1$.

4) Vis, at enhver linie i planen $z = 1$, som er parallel med Y-aksen, netop skærer K i eet punkt, således at hele K fremstilles ved ligningerne $y = f(x)$, $z = 1$, hvor $f(x)$ er defineret for alle x.

II.

Vis, at funktionen

$$F(x) = \operatorname{Arc\,tg} |\sin x|$$

har en Fourierrække, som kan skrives på formen

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos 2nx.$$

Find værdien af Fourierkonstanten a_2.

Vis ved hjælp af delvis integration, at $F'(x)$ får Fourierrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-2n\,a_{2n}) \sin 2nx,$$

og gør rede for konvergensforholdene for de to Fourierrækker. Anfør specielt, hvilke af rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}^{\,2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |2n\,a_{2n}|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |2n\,a_{2n}|^2,$$

der er konvergente.