Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Juni 1955.

Matematisk analyse.

I.

1) Vis, at

$$\ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dy \tag{1}$$

ethvert område, hvori udtrykket er defineret.
er et totalt differential i ~~enhver halvplan, som ikke indeholder begyndelsespunktet (0, 0).~~
Den benyttede sætning ønskes anført.

2) Undersøg, om der findes nogen punkter (x, y), i hvilke en stamfunktion til (1) har ekstremum.

3) Bestem i halvplanen $x > 0$ den stamfunktion $u(x, y)$ til (1), der har værdien -1 i $(1, 0)$.

4) Vis, at

$$u(x, y) + u(x, -y) = 2x(\ln x - 1),$$

og vis endvidere, at for $x > 0$, $y \geqq 0$ og $x^2 + y^2 < \varrho^2$, hvor $0 < \varrho < \frac{1}{2}$, er

$$0 > u(x, y) > 2\varrho(\ln \varrho - 1).$$

Bevis ved hjælp af disse relationer, at $u(x, y)$ har en grænseværdi, når (x, y) inden for halvplanen $x > 0$ konvergerer mod randpunktet $(0, 0)$.

II.

Idet

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

er en potensrække med konvergenstal λ, skal man angive sætningerne om potensrækker for $f'(x)$ og for $\int_0^x f(t)\,dt$. Gør rede for beviserne for disse sætninger, idet der som udgangspunkt tages sætningerne om differentiation og integration af ligelig konvergente rækker af kontinuerte funktioner (disse sætninger ønskes anført).

Bestem summen og konvergensintervallet for rækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)\,n} x^n.$$