Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1954—55.

Matematisk analyse.

I.

1) Lad $z = f(x, y)$ være en funktion af to variable, defineret i et område ω af XY-planen. Fremsæt definitionen af, at $z = f(x, y)$ er differentiabel i et indre punkt (x_0, y_0) af ω.

2) Lad

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{i punkter, hvor } xy = 0 \\ x \sin \dfrac{1}{x} + y \sin \dfrac{1}{y} & \text{i punkter, hvor } xy \neq 0, \end{cases}$$

og lad

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{i punkter, hvor } xy = 0 \\ y^2 \sin \dfrac{1}{x} + x^2 \sin \dfrac{1}{y} & \text{i punkter, hvor } xy \neq 0. \end{cases}$$

Undersøg, om hver af funktionerne $g(x, y)$ og $h(x, y)$ er kontinuert og differentiabel i punktet $(0, 0)$.

3) Lad $\varphi(x, y)$ være defineret i et område af XY-planen omkring $(0, 0)$, og lad $\varphi(x, y)$ være kontinuert i $(0, 0)$. Vis, at funktionen

$$f(x, y) = (x + y)\,\varphi(x, y)$$

er differentiabel i $(0, 0)$.

II.

1) Lad

$$f_n(x) = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$$

og

$$g_n(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx.$$

Find (f. eks. ved hjælp af Eulers formel) udtryk for $f_n(x)$ og $g_n(x)$ for $0 < |x| \leqq \pi$.

2) Lad $u_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\ln n}$. Vis, at den trigonometriske række $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n(x)$ er konvergent for alle x.

3) Vis, at hver af rækkerne $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ og $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^2}$ er divergent, og vis derved, at den trigonometriske række $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n(x)$ ikke kan være fourierrække for en i intervallet $-\pi \leqq x \leqq \pi$ integrabel funktion.

4) Vis, at rækken $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \displaystyle\int_0^x u_n(x)\,dx$ er divergent for $0 < |x| \leqq \pi$.

5) Undersøg (f. eks. ved anvendelse af 4)), om rækken $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n(x)$ er ligelig konvergent i intervallet $-\pi \leqq x \leqq \pi$.