SKOLEEMBEDSEKSAMEN

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets

matematisk-fysisk faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1954.

Matematisk analyse.

I

Lad $f(x,y)=f(P)$ være en funktion af to variable x og y defineret i en omegn af punktet $P_0=(0,0)$.

1)Fremsæt den på punktfølgebegrebet baserede definition af, at $f(P)$ har en grænseværdi c, når $P \to P_0$.

2)Angiv dernæst (uden bevis) en nødvendig og tilstrækkelig betingelse, hvori punktfølgebegrebet ikke indgår, for at $f(P) \to c$, når $P \to P_0$.

3)Undersøg, om følgende funktioner har grænseværdier for (x,y) $(0,0)$:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x}{\sin y} & \text{for } 0<|y|<\pi \\ 1 & \text{for } y=0,\ x\neq 0 \end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{\sin y} & \text{for } 0<|y|<\pi \\ 0 & \text{for } y=0,\ x\neq 0 \end{cases}$$

$$h(x,y)=\begin{cases} x\log|y| & \text{for } y\neq 0 \\ 0 & \text{for } y=0,\ x\neq 0. \end{cases}$$

II

Lad

$$F(x)=\int_0^{x^2}\frac{e^t}{t+1}dt$$

1) Angiv de værdier af x, for hvilke funktionen $F(x)$ er defineret, og bestem dens monotonitets- og konveksitetsintervaller.

2) Find en potensrækkeudvikling for $\frac{e^t}{t+1}$ og vis derved, at $F(x)$ i intervallet $-1<x<1$ kan fremstilles ved en potensrække

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

og angiv denne. Bestem $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n|b_n|$ og $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, n|b_n|$.

III

Vis, at det uegentlige planintegral

$$\int_{\omega} x\log(1-x^2-y^2)\,d\sigma,$$

hvor ω er det ved ulighederne $x^2+y^2<1$, $x\geq 0$ bestemte område, er konvergent.

Log betegner den naturlige logaritme.