S K O L E E M B E D S E K S A M E N

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets
matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven, Juni 1953.

Matematisk analyse.
Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

Find en for $\div\infty < y < +\infty$ defineret funktion $f(y)$ med den egenskab, at differentialudtrykket

$$(2x+yf(y))dx+(3y^2+2x(f(y)+y^3))dy$$

er et totalt differential i hele xy-planen og har en stamfunktion, som i begge de to punkter (0,0) og (1,1) antager værdien nul.

II.

Angiv samtlige reelle værdier af x, for hvilke det uendelige produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+n^3\ln n\cdot x^{2n})$$

er absolut konvergent.

III.

Med

(1) $f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots, f_n(x), \ldots\ldots$

betegnes en følge af funktioner, som alle er definerede i et og samme interval I. Gør rede for, hvad man forstår ved, at følgen er

A. konvergent i intervallet I,

B. ligelig konvergent i intervallet I.

I resten af opgaven antages givet, at følgen (1) er konvergent i intervallet I; dens grænsefunktion betegnes med $f(x)$. Tillige antages givet, at hver af funktionerne $f_n(x)$ er begrænset i I.

1) Det givne medfører ikke, at $f(x)$ er begrænset i I. Vis dette ved et eksempel.

2) Idet det antages givet, at følgen (1) er ligelig konvergent i intervallet I, skal man vise, at der eksisterer et positivt tal K, således at

(2) $|f_n(x)| \leq K$

for alle x i intervallet I og alle $n=1,2,3,\ldots$, samt at $f(x)$ er begrænset i I.

3) Vis, at hvis følgen (1) er ligelig konvergent i intervallet I, og

$g_1(x), g_2(x), \ldots\ldots, g_n(x), \ldots\ldots$

ligeledes er en ligelig konvergent følge af begrænsede funktioner i I, da vil de to følger

$f_1(x)+g_1(x), f_2(x)+g_2(x), \ldots, f_n(x)+g_n(x), \ldots$

og

$f_1(x)\cdot g_1(x), f_2(x)\cdot g_2(x), \ldots, f_n(x)\cdot g_n(x), \ldots$

begge være ligelig konvergente i I.

4) Det antages givet, at følgen (1) er ligelig konvergent i I, og at K er et sådant positivt tal, at (2) er opfyldt. Med $F(t)$ betegnes en i intervallet $\div K \leq t \leq K$ defineret funktion. Undersøg, om kontinuitet af $F(t)$ i hele intervallet $\div K \leq t \leq K$ medfører ligelig konvergens af følgen $F(f_1(x)), F(f_2(x)), \ldots$ i intervallet I.