Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1951/52.

Matematisk analyse.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

1. Lad $L(x, y)$ og $M(x, y)$ være to funktioner, som i hele planen med undtagelse af punktet $(0, 0)$ har kontinuerte partielle afledede, der tilfredsstiller betingelsen $L'_y(x, y) = M'_x(x, y)$. Idet k betegner cirklen

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t; \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi,$$

skal det vises, at

$$\int_k L(x, y)\,dx + M(x, y)\,dy$$

er uafhængigt af R.

2. Lad $\varphi(y)$ være en funktion, der er differentiabel for alle y med kontinuert differentialkvotient, og som for $y = 0$ antager værdien 1. Bestem $\varphi(y)$, således at $L(x, y)\,dx + M(x, y)\,dy$, hvor

$$L(x, y) = \frac{x\sin x - y\cos x}{x^2 + y^2}\varphi(y) \quad \text{og} \quad M(x, y) = \frac{x\cos x + y\sin x}{x^2 + y^2}\varphi(y)$$

er et totalt differential for $y > 0$ og for $y < 0$.

3. Idet k er den i 1. indførte cirkel, medens $L(x, y)\,dx + M(x, y)\,dy$ er det i 2. bestemte totale differential, skal det vises, at

$$\int_k L(x, y)\,dx + M(x, y)\,dy = \int_0^{2\pi} \cos(R\cos t)\, e^{-R\sin t}\,dt,$$

og det skal vises, at dette integral har værdien 2π (undersøg, hvorledes integralet forholder sig, når R konvergerer mod nul).

II.

1. Funktionen $y = f(x) = \frac{1}{2}(\sinh x + \sin x)$ ønskes udviklet i en potensrække

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots.$$

2. Vis, at $y = f(x)$ besidder en for alle y defineret omvendt funktion $x = g(y)$.

3. Vis, at $y = f(x) - x$ er voksende, og vis (f. eks. ved hjælp af en geometrisk betragtning) den for alle $x > 0$ gyldige ulighed

$$0 < x - g(x) < f(x) - x.$$