

Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets
matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1950/51.

Matematisk analyse.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

I parallelstrimlen $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ betragtes differentiaalligningen

$$\frac{d(y - \operatorname{tg} x)}{dx} = y(y - \operatorname{tg} x).$$

Vis, at samtlige løsninger $y = \varphi(x)$ til differentiaalligningen er voksende funktioner. Angiv eksistens- og entydighedssætningens udsagn for differentiaalligningen. Find det fuldstændige integral, og vis, at en og kun en integralkurve fortsætter hen over hele strimlen, idet det maksimale definitionsinterval angives for enhver af integralkurverne. Undersøg, hvorledes integralkurverne forholder sig ud mod parallelstrimlens begrænsningslinier.

II.

En potensrække

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + \dots$$

er givet ved følgende forskrift for koefficienterne a_n : Idet indeks n skrives på formen $n = 2^m u$, hvor u er et ulige tal og m et helt tal ≥ 0 , sættes

$$a_n = \frac{2}{u} - \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

1) Vis, at

$$\frac{1}{n} \leq a_n \leq 2 - \frac{1}{n},$$

og find herved rækkens konvergenstal λ .

2) Undersøg rækkens konvergensforhold for $x = \pm \lambda$.

3) Vis, at den ved rækken fremstillede funktion $f(x) \rightarrow +\infty$ for $x \rightarrow +\lambda$ fra venstre.

4) Vis, at $f(x)$ opfylder funktionalligningen

$$f(x^2) - f(x) = \ln(1 - x).$$

5) Undersøg, hvorledes $f(x)$ forholder sig for $x \rightarrow -\lambda$ fra højre.

vend!

6) Find ved hjælp af 4) et udtryk for

$$f\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \quad (n=1, 2, \dots),$$

og vis herved, at

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2^n}}{2^{2^n} - 1} = e^{f\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

7) Vis, ud fra definitionen af $f(x)$, at $f(x)$ er opad hult i $0 < x < \lambda$, og derefter ved hjælp af 4), at $f(x)$ er opad hult i hele intervallet $-\lambda < x < \lambda$.

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.