

Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets
matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1949/50.

Matematisk analyse.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

Vis, at for $0 < x < \pi$ findes der til de to sammenhørende differentiaalligninger

$$\frac{dz}{dx} \sin x - z \cos x - \frac{dy}{dx} \sin x \cos x + y = 0$$

og

$$z - \frac{dy}{dx} \sin x - 2y \cos x = 0$$

en integralkurve, som ligger på cylinderfladen $y = \frac{1}{\sin x}$, og bestem den. Find i det nævnte interval samtlige integralkurver, og angiv det partikulære integral gennem punktet $(\frac{\pi}{2}, 1, 1)$.

Find endelig y som funktion af x i løsningerne til de to sammenhørende differentiaalligninger

$$\frac{dz}{dx} \sin x - z \cos x - \frac{dy}{dx} \sin x \cos x + y = \sin 2x$$

og

$$z - \frac{dy}{dx} \sin x - 2y \cos x = 0.$$

II.

1) Vis, at hvis $\varphi(x)$ er kontinuert i et interval I , $a \leq x \leq b$, og $\varphi(x) \geq 0$, og det vides, at $\varphi(x) > 0$ i et punkt af I , da er $\int_a^b \varphi(x) dx > 0$.

2) Med $f(x)$ betegnes en i intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$ defineret, to gange differentiabel funktion, hvis anden afledede er kontinuert. Vis, at hvis $f(x)$ er en lige funktion, vil koefficienterne a_n i fourierrækken

$$(A) \quad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

for den periodiske funktion, som i periodeintervallet $-\pi < x \leq \pi$ stemmer overens med $f(x)$, kunne skrives

$$a_n = \frac{1}{n^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) [(-1)^n - \cos nx] dx \quad \text{for } n = 1, 2, \dots$$

vend!

3) Vis, at hvis $f(x)$ er opad hult i intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$, er $(-1)^n a_n$ positiv for alle n , og fourierrækken absolut konvergent.

4) Vis, at funktionen $f(x) = 1 - \cos \frac{x}{2}$ opfylder de under 2) og 3) nævnte krav, og angiv dens fourierrække (A). Find summen af rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.