

Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets
matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Juni 1949.

Matematisk analyse.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

Vis, at ligningen

$$(1) \quad (1 + y^2)e^{z+1} + z - 2exy = 0$$

i et område omkring $(1, 1, 0)$ fremstiller z som en differentiabel funktion $z(x, y)$ af x og y , og angiv en parameterfremstilling for tangenten i dette punkt til skæringskurven mellem fladen (1) og fladen $x^2 + y^2 + 2z - 2 = 0$.

Find et punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$, således at (1) i et område omkring P_0 fastlægger z som en to gange differentiabel funktion $z(x, y)$ af x og y , og således at $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ i P_0 . Undersøg, om $z(x, y)$ har ekstremum i P_0 ; og angiv funktionens 2^{det} differential i P_0 . Ligningerne, som bestemmer de afledede af 2^{den} orden af $z(x, y)$ i et punkt (x, y, z) af fladen (1), ønskes fuldstændigt opskrevet.

Vis, at (1) i XYZ-rummet fastlægger z som en for alle x og y defineret funktion $z(x, y)$.

II.

Vis, at fourierrækken for den periodiske funktion, som i periodeintervallet $-\pi \leq x \leq \pi$ er lig med $\cosh 2x$, har formen

$$(2) \quad c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sinh 2\pi \cdot \cos nx}{\pi \left(1 + \frac{n^2}{4}\right)},$$

og find c . Gør rede for rækkens forhold i henseende til konvergens, absolut konvergens og ligelig konvergens.

Find summen af rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 4)^2}.$$

Idet det n ^{te} restled ved denne række betegnes r_n , skal man angive et positivt tal α , således at man for alle positive n har $r_n < K \cdot n^{-\alpha}$, hvor K er en positiv konstant.

Find ud fra rækken (2) en række, som fremstiller $\sinh 2x$ for $-\pi \leq x \leq \pi$, og anfør den derved benyttede sætning. Angiv summen af den fremkomne række for $x = \frac{5}{2}\pi$.

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.