Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1948/49.

Matematisk analyse.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

Om den kvadratiske matrix

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Bmatrix}$$

af n^{te} orden er givet, at

$$a_{i,i+1} = 1 \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \cdots, n-1,$$

medens alle dens øvrige elementer er nul. Find samtlige talsæt $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, for hvilke

$$x_1 A + x_2 A^2 + \cdots + x_{n-1} A^{n-1} + x_n A^n = \mathbf{0},$$

hvor $\mathbf{0}$ er den matrix af n^{te} orden, hvis elementer alle er nul, og hvor A^{ν} betegner produktet af ν matricer A.

II.

Find indenfor de tre åbne områder, i hvilke linierne $x = 1$ og $x = -1$ deler planen, mængden af samtlige punkter, der er relative minimumspunkter for integraler til differentialligningen

$$(1) \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = x^2 + 2.$$

Vis dernæst, at differentialligningerne

$$(1-x)\frac{dy}{dx} - y = 1 - 2x$$

og

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

har et fælles integral, og find sluttelig det fuldstændige integral til (1) i hvert af intervallerne $-\infty < x < -1$, $-1 < x < 1$ og $1 < x < +\infty$.

vend!

III.

. Idet $f(x)$ betegner en i et interval $a < x \leqq b$ kontinuert funktion, skal man gøre rede for, hvad der menes med, at det uegentlige integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

er konvergent, og undersøge, hvorvidt

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}},$$

hvor $a < b$, er konvergent. Dernæst skal man vise, at hvis to funktioner $f(x)$ og $g(x)$ i et interval $a < x \leqq b$ er kontinuerte og tilfredsstiller uligheden $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$, vil konvergens af integralet

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

medføre konvergens af integralet

$$\int_a f(x)\,dx\,.$$

2. Om en funktion $\varphi(x)$ antages givet, at den i et interval $a < x \leqq b$ er kontinuert, at $\varphi(a) = 0$, at $0 < \varphi(x)$ for $a < x \leqq b$, samt at $\varphi(x)$ for $x = a$ er differentiabel med en fra nul forskellig differentialkvotient $\varphi'(a)$. Vis, at det uegentlige integral

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

er konvergent.

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, maa være tydeligt afmærkede.