Skoleembedseksamen

ved det matematisk-naturvidenskabelige Fakultets matematisk-fysiske Faggruppe.

Forprøven. Juni 1947.

Matematik 1 (Matematisk Analyse).

Opgaver til Besvarelse i 4 Timer.

I.

1) Gør Rede for, hvad Eksistens- og Entydighedssætningen for Differentialligninger af første Orden udsiger om Integralkurverne til Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{1+x^2}.$$

2) Vis, at Integralkurverne i Omraadet $-1 < y < 1$ er to Gange differentiable Kurver. Angiv, saavel ved en Figur som ved Uligheder, de Omraader, indenfor hvilke Integralkurverne er opad hule, henholdsvis nedad hule; der ønskes redegjort for Forløbet af de Kurver, der begrænser de fundne Omraader.

3) Find samtlige Integralkurver i Omraadet $-1 < y < 1$, og vis, at for enhver af dem er y en rational Funktion af x.

4) Angiv dernæst samtlige Integralkurver i Omraadet $-1 \leqq y \leqq 1$, og skitser de gennem Punkterne $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(1, 0)$ og $(2, 0)$ gaaende Integralkurver.

5) Bestem Grænseværdien af y for $x \to +\infty$ for den Integralkurve, der gaar gennem Punktet $(a, 0)$, hvor a er et vilkaarligt givet reelt Tal.

II.

1) Formuler de vigtigste Konvergenskriterier for uendelige Rækker med positive Led, og anvend dem paa Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} = 1^{-\alpha} + 2^{-\alpha} + \cdots + n^{-\alpha} + \cdots,$$

hvor α er en reel Parameter.

2) Gør Rede for, hvorledes Cauchy's Rodkriterium kan anvendes ved Undersøgelsen af Potensrækkernes Konvergensforhold.

Ved Bedømmelsen tages Hensyn til Fremstillingens Form. Almindeligvis modtages til Bedømmelse kun Besvarelser, der er skrevet paa de til Indskrivning beregnede Ark. Kun under særlige Forhold, som da maa angives, kan Kladden afleveres. De Dele, som i saa Fald ønskes taget i Betragtning, maa være tydeligt afmærkede.
