Skoleembedseksamen

ved det matematisk-naturvidenskabelige Fakultets matematisk-fysiske Faggruppe.

Forprøven. Januar 1947.

Matematisk Analyse.

Opgaver til Besvarelse i 4 Timer.

I.

Med I betegnes et Interval paa den reelle Akse og med

$$(1) \qquad f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$$

en Følge af Funktioner, der alle er definerede i I.

1) Hvad betyder det, at (1) er konvergent i I? Hvad betyder det, at (1) er ligelig konvergent i I?

2) Det antages givet, at I er et lukket Interval $a \leq x \leq b$, og at (1) er konvergent i I og ligelig konvergent i det aabne Interval $a < x < b$. Undersøg, om man heraf kan slutte, at (1) er ligelig konvergent i I.

3) Det antages givet, at Funktionsfølgen (1) konvergerer ligeligt i det lukkede Interval $a \leq x \leq b$, at Funktionerne $f_n(x)$ alle er kontinuerte, og at $F(x, y)$ er en i Parallelstrimlen $a \leq x \leq b$ i xy-Planen defineret og kontinuert Funktion. Undersøg, om man af det givne kan slutte, at den Funktionsfølge, hvis n^{te} Funktion er

$$h_n(x) = F(x, f_n(x)),$$

er ligelig konvergent i Intervallet $a \leq x \leq b$.

4) Undersøg, om den Funktionsfølge, hvis n^{te} Funktion er

$$f_n(x) = (1 + x^n) \sin^n \pi x,$$

er konvergent i Intervallet $0 \leq x \leq 1$, og om den er ligelig konvergent i dette Interval.

5) Undersøg, om den Talfølge, hvis n^{te} Element er

$$a_n = \int_0^1 (1 + x^n) \sin^n \pi x \, dx,$$

er konvergent.

II.

Find Konvergenstallet λ for Potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, hvor

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 2 \sin n} + \frac{1}{n^2 + 4 \sin 2n} + \frac{1}{n^2 + 6 \sin 3n} + \cdots + \frac{1}{n^2 + 2n \sin n^2}.$$

Undersøg, om Rækken er konvergent i Konvergensintervallets højre Endepunkt, og undersøg, om den ved Rækken fremstillede Funktion har en Grænseværdi for $x \to \lambda$ fra venstre Side.

III.

Giv en kortfattet Beskrivelse af de to Flader, som i et sædvanligt retvinklet Koordinatsystem i Rummet fremstilles ved Ligningerne

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 1 \quad \text{og} \quad (x^2 + 4y^2)^2 = x^2 - 4y^2,$$

og angiv Antallet af Omraader, i hvilke de to Flader deler Rummet. (Man kan anvende en nærliggende ret Affinitet.)

Find Volumen af det Omraade, der indeholder Punktet $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right)$.

Ved Bedømmelsen tages Hensyn til Fremstillingens Form. Almindeligvis modtages til Bedømmelse kun Besvarelser, der er skrevet paa de til Indskrivning beregnede Ark. Kun under særlige Forhold, som da maa angives, kan Kladden afleveres. De Dele, som i saa Fald ønskes taget i Betragtning, maa være tydeligt afmærkede.