Skoleembedseksamen

ved det matematisk-naturvidenskabelige Fakultets matematisk-fysiske Faggruppe.

Forprøven. Juni 1946.

Matematisk Analyse.

I.

Angiv de Værdier af Parameteren a, for hvilke Funktionen

$$F(x) = \left\{ \frac{1 + 2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x^2}}}{a} \right\}^{x + \frac{1}{x}}$$

er defineret og differentiabel i Intervallet $0 < x < +\infty$, og udregn Differentialkvotienten $F'(x)$.

Undersøg for enhver af de fundne Værdier af a, hvorvidt $F(x)$ har en Grænseværdi for $x \to +\infty$, og bestem Grænseværdien i Tilfælde af Konvergens.

II.

Med $f(x)$ betegnes en i Intervallet $0 \leqq x < 1$ kontinuert, voksende og ubegrænset Funktion, hvis Værdi for $x = 0$ ikke er negativ, og med $F(\xi)$ Funktionen

$$F(\xi) = \int_0^\xi f(x)\,dx + (1 - \xi) f(\xi), \qquad 0 < \xi < 1.$$

1) Angiv for et vilkaarligt valgt ξ ved Hjælp af en Figur den geometriske Betydning af $F(\xi)$. Undersøg, om $F(\xi)$ er voksende.

2) Forklar, hvad man mener med, at det uegentlige Integral

$$\int_0^1 f(x)\,dx \tag{1}$$

er konvergent, og gør Rede for, om man af, at (1) er konvergent med Værdien A, kan slutte, at

$$F(\xi) \to A \qquad \text{for} \qquad \xi \to 1 \text{ fra venstre Side.} \tag{2}$$

3) Gør Rede for, om man af, at Relationen (2) er rigtig, kan slutte, at Integralet (1) er konvergent med Værdien A.

4) Vis, at Integralet (1) da og kun da er konvergent med Værdien A, naar den Talfølge, hvis n^{te} Element er

$$a_n = \frac{1}{n} \left\{ f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right\},$$

er konvergent med Grænseværdien A.

Vend!

III.

Idet $\boldsymbol{M}$ betegner en Matrix, vil vi med $\varrho_{\boldsymbol{M}}$ betegne dens Rang, med $R_{\boldsymbol{M}}$ det af alle dens Rækkevektorer udspændte Vektorrum og med $S_{\boldsymbol{M}}$ det af alle dens Søjlevektorer udspændte Vektorrum. Angiv den Betydning, som Tallet $\varrho_{\boldsymbol{M}}$ har i Relation til Vektorrummene $R_{\boldsymbol{M}}$ og $S_{\boldsymbol{M}}$.

Gør Rede for, at hvis tre Matricer, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{C}$ opfylder Ligningen

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C},$$

er $S_{\boldsymbol{C}}$ indeholdt i $S_{\boldsymbol{A}}$, og $R_{\boldsymbol{C}}$ indeholdt i $R_{\boldsymbol{B}}$. Gør endvidere Rede for, at hvis alle Elementer i $\boldsymbol{C}$ er Nul, vil $S_{\boldsymbol{B}}$ være indeholdt i Løsningsrummet til det lineære, homogene Ligningssystem

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0},$$

hvor $\boldsymbol{X}$ er den ubekendte Søjlevektor, og $\boldsymbol{0}$ er en Søjlevektor, hvis Elementer alle er Nul.

Vi antager nu, at $\boldsymbol{A}$ har p Rækker og q Søjler, at $\boldsymbol{B}$ har q Rækker og p Søjler, samt at

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = c\boldsymbol{E},$$

hvor c er et Tal, og $\boldsymbol{E}$ er en Enhedsmatrix. Vis, at hvis $c \neq 0$, har baade $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$ Rangen p. Vis endelig, at hvis $c = 0$, er $\varrho_{\boldsymbol{A}} + \varrho_{\boldsymbol{B}} \leq q$.

Ved Bedømmelsen tages Hensyn til Fremstillingens Form. Almindeligvis modtages til Bedømmelse kun Besvarelser, der er skrevet paa de til Indskrivning beregnede Ark. Kun under særlige Forhold, som da maa angives, kan Kladden afleveres. De Dele, som i saa Fald ønskes taget i Betragtning, maa være tydeligt afmærkede.
