Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige Fakultets matematisk-fysiske Faggruppe.

Forprøven. Januar 1946.

Matematisk Analyse.

I.

1. Med k betegnes den i Halvrummet $z \geqq 0$ i et sædvanligt retvinklet xyz-Koordinatsystem beliggende Del af Skæringskurven mellem Fladerne

$$x^2 + y^2 + 2z = 1 \quad \text{og} \quad x^2 + y^2 = 2x.$$

Gør Rede for Projektionerne af k ind paa Koordinatplanerne. Find Ligningen for den Normalplan til k, som er vinkelret paa Planen $y = x\sqrt{3}$.

2. Find Volumen af det Omraade Ω, der dannes af de Punkter, hvis retvinklede Koordinater (x, y, z) tilfredsstiller begge de to Uligheder

$$x^2 + y^2 + 2|z| \leqq 1 \quad \text{og} \quad x^2 + y^2 \leqq 2x.$$

(Benyt f. Eks. Reduktion i polære Koordinater).

3. Find Arealet af det Fladestykke F_1, der dannes af de Punkter (x, y, z), for hvilke

$$x^2 + y^2 + 2|z| \leqq 1 \quad \text{og} \quad x^2 + y^2 = 2x.$$

4. Udregn Fladeintegralet

$$\int_{F_1} |z|\, da,$$

og udtryk Fladeintegralet

$$\int_{F_2} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, da,$$

hvor F_2 er det Fladestykke, der dannes af de Punkter (x, y, z) i Halvrummet $z \geqq 0$, for hvilke

$$x^2 + y^2 + 2z = 1 \quad \text{og} \quad x^2 + y^2 \leqq 2x,$$

som et bestemt Integral af en Funktion af een Variabel.

5. Find Strømmen af Vektorfeltet

$$\boldsymbol{V}(x, y, z) = \{x, 2y, 3z\}$$

udad gennem den lukkede Flade, som dannes af Fladestykkerne F_1, F_2 og det til F_2 med Hensyn til xy-Planen symmetriske Fladestykke.

II.

Med $\varphi(x)$ betegnes en i Intervallet $0 \leqq x \leqq 1$ kontinuert Funktion, som ikke antager nogen negativ Værdi, og med $f(x)$ den ved

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{naar } x \text{ er et rationalt Tal,} \\ 0, & \text{naar } x \text{ er et irrationalt Tal,} \end{cases}$$

i samme Interval definerede Funktion. Gør Rede for, hvorvidt man af, at det øvre Integral

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,\varphi(x)\, dx$$

har Værdien Nul, kan slutte, at $\varphi(x)$ er konstant lig med Nul i Intervallet $0 \leqq x \leqq 1$.
