Skoleembedseksamen.

Forprøven. Januar 1945.

Matematisk Analyse.

I.

Fremsæt den ved Hjælp af Talfølgebegrebet givne Definition af

$$(1) \qquad f(x) \to +\infty \quad \text{for } x \to -\infty,$$

hvor $f(x)$ betegner en i et Interval $-\infty < x < a$ defineret reel Funktion. Bevis derpaa, at en nødvendig og tilstrækkelig Betingelse for, at (1) er opfyldt, bestaar i, at der til ethvert reelt Tal α findes et reelt Tal β, saaledes at $f(x) > \alpha$ for $x < \beta$.

II.

Bestem samtlige Kurver

$$y = \varphi(x), \; z = \psi(x),$$

hvor Funktionerne $\varphi(x)$ og $\psi(x)$ er differentiable og opfylder Ligningerne

$$\varphi'(x) = \int_0^x (6t - \varphi(t) - \psi(t))\, dt$$

$$\psi'(x) = \int_x^0 (6t + \varphi(t) + \psi(t))\, dt$$

for alle reelle Værdier af x.

Hvilke af de fundne Kurver skærer Planen $x = \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$ i et Punkt, hvor Kurvetangenten er parallel med Planen $2x + y + z = 1$?

III.

Angiv for hver af de to Rækker

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} (x-1)^n \quad \text{og} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \sin \frac{x}{\sqrt{n}}$$

samtlige reelle Værdier af x, for hvilke Rækken er konvergent.

Gør Rede for, hvad det betyder, at en uendelig Række er ligelig konvergent, og find samtlige Intervaller, indenfor hvilke Rækken 1) er ligelig konvergent. Specielt ønskes undersøgt, hvorvidt Rækken 1) er ligelig konvergent i Intervallet, der bestaar af samtlige Værdier af x, for hvilke den er konvergent.

Undersøg endelig, for hvilke Værdier af x Summen $s(x)$ af Rækken 2) er en differentiabel Funktion.
