Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Fagprøven. Januar 1950.

Hovedfag matematik.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

Vis, at kongruensen

$$x^2 \equiv 1 \pmod{p^\alpha} \qquad (\alpha \geqq 1),$$

hvor p er et ulige primtal, ikke har andre rødder end $x \equiv 1$ og $x \equiv -1 \pmod{p^\alpha}$.

Vis endvidere, idet $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, hvor $p_1, \dots, p_r$ er indbyrdes forskellige ulige primtal, at kongruensen

$$x^2 \equiv 1 \pmod{m}$$

har netop 2^r indbyrdes inkongruente rødder.

Bevis sluttelig, idet m har samme betydning som ovenfor, følgende generalisation af Wilsons sætning: Betegner P produktet af de $\varphi(m)$ med m primiske tal blandt tallene $1, 2, \dots, m$, da er

$$P \equiv \pm 1 \pmod{m},$$

hvor minustegnet kun gælder i det tilfælde, hvor $r = 1$, d.v.s. hvor m er en primtalpotens.

II.

Hvilke oplysninger giver Descartes' sætning om antallene af positive og negative reelle rødder i polynomiet

$$f(x) = x^6 - 3x^4 - 2x^3 + 36x - 20 \quad ?$$

Find dernæst disse antal ved hjælp af Sturms sætning, idet det benyttes, og begrundes, at hvis en Sturm'sk kæde indeholder et polynomium af 2^{den} grad uden reelle nulpunkter, kan kæden afbrydes ved dette polynomium.

Bestem for hver af de reelle rødder et par på hinanden følgende hele tal, mellem hvilke roden er beliggende.

Angiv to positive tal r og R, således at når z betegner en vilkårlig af de komplekse rødder i f(x), da er $r < |z| < R$.