Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets
matematisk-fysiske faggruppe.

Fagprøven. Juni 1949.

Hovedfag matematik.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

1. Med $\varphi(z)$ betegnes en i et punkt $z=a$ i den komplekse z-plan regulær funktion, for hvilken $\varphi'(a) \neq 0$. Vis, at funktionen

$$\frac{\varphi(z)}{(z-a)^2} \qquad (z = x+iy)$$

har en pol i punktet $z=a$, og gør rede for, hvorledes ordenen afhænger af $\varphi(a)$. Find residuet i a udtrykt ved $\varphi'(a)$.

2. Find samtlige poler for funktionen

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{(z^4+2z^2+1)(z^2+4)}$$

og angiv deres ordener. Vis, at summen af residuerne i de poler, der har positiv imaginærdel, er

$$-\frac{i}{36}(4e^{-1}+e^{-2}).$$

3. Find værdierne af de to reelle integraler

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^4+2x^2+1)(x^2+4)}\,dx \qquad \text{og} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^4+2x^2+1)(x^2+4)}\,dx\,.$$

[Integrer først $F(z)$ langs et akseparallelt rektangel, hvis ene side falder på x-aksen, og som helt tilhører halvplanen $y \geqq 0$. Udfør dernæst en passende grænseovergang.]

II.

Vis,

1) at 9 er det eneste kvadrattal af formen 2^n+1,
2) at intet kubiktal kan skrives på formen 2^n+1,
3) at hvis m og n er positive hele tal, og m+n er et primtal, da er

$$\frac{(m+n-1)!}{m!\,n!}$$

et helt tal.