

Skoieembedseksamen
ved det matematisk-naturvidenskabelige fakultets
matematisk-fysiske faggruppe.
Fagprøven. Januar 1949.

Matematik.

- I. Idet a er en positiv konstant, skal man bestemme værdien af integralet

$$\int \frac{\cos ax + 7x + x^3 \cos x}{x^4 + 4} dx.$$

(Vis først, at integralets værdi ikke ændres, når telleren under integraltegnet erstattes med e^{iax} , og udregn det derved fremkomne integral ved residueregning).

- II. For hvilke primtal p er -1 kvadratisk rest mod p ?

I det følgende betragtes et primtal p af formen $4n+1$. Ved symbolet Ψ (Ψ reel) forstås det største hele tal Ψ .

1) Idet de forskellige, mindste, positive kvadratiske rester mod p betegnes r_1, r_2, \dots, r_{2n} , skal man bestemme summen

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{2n}.$$

2) Vis at

$$\prod_{y=1}^{\Psi} y^2 - \prod_{y=1}^{\Psi} \frac{y^2}{p} = \prod_{y=1}^{\Psi} \left(y^2 - p \frac{y^2}{p} \right)$$

har værdien $\frac{p-1}{2}$.

3) Vis, f.eks. ved betragtning af punkterne i enhedsgitteret indenfor området $0 \leq x < p$, $0 \leq y < p$ i en xy -plan, at der gælder formelen

$$\prod_{y=1}^{\Psi} \prod_{x=1}^{\Psi} \frac{y^2}{p} + \prod_{x=1}^{\Psi} xp = p^2 + 1.$$

4) Find heraf $\prod_{x=1}^{\Psi} xp$ (benyt, at $1^2 + 2^2 + \dots + h^2 = \frac{1}{6} h(h+1)(2h+1)$) og vis, at denne sum aldrig er delelig med 5.