Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige Fakultets matematisk-fysiske Faggruppe.

Fagprøven. Januar 1947.

Hovedfag Matematik.

Opgaver til Besvarelse i 4 Timer.

I.

1. Bevis, at

$$\int_L z(\cot z + i)\,dz = 0,$$

idet z betegner en komplex Variabel $x + iy$, og L betegner en Integrationsvej bestaaende af de tre Liniestykker

$$x = -\frac{\pi}{2},\ \infty > y \geqq 0; \quad -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ y = 0; \quad x = \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq y < \infty.$$

2. Udregn Integralerne

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cot x\,dx \qquad \text{og} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\,dx.$$

II.

1. Idet $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ betegner Rødderne i Ligningen

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

skal angives en Metode til Bestemmelse af Potenssummerne,

$$s_p = \alpha_1^p + \alpha_2^p + \cdots + \alpha_n^p.$$

2. Vis, at naar $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ betegner Rødderne i den symmetriske Ligning

$$x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} + \cdots + rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0,$$

gælder Relationen

$$\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2} + \cdots + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_n^2} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} + \cdots + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_n^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^2}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_n^2}{\alpha_2^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^2}{\alpha_{n-1}^2} = (p^2 - 2q)^2 - n.$$

3. Udtryk paa tilsvarende Maade Summen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\substack{\mu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} \frac{\alpha_\nu^3}{\alpha_\mu^3}$$

ved p, q og r.
