Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige Fakultets matematisk-fysiske Faggruppe.

Fagprøven. Juni 1946.

Hovedfag Matematik.

Opgaver til Besvarelse i 4 Timer.

I.

1. En ret Vinkel v har sit Toppunkt i et Punkt ζ af den komplekse z-Plan. Idet $b(r)$ betegner den Bue, som v udskærer af Cirklen med Centrum ζ og Radius r, gennemløbet i positiv Omløbsretning, skal man vise følgende: For en i z-Planen meromorf Funktion $f(z)$, som i ζ har en Pol af første Orden med Residuum $R(\zeta)$, gælder

$$\lim_{r=0}\int_{b(r)} f(z)\,dz = \frac{\pi i}{2} R(\zeta).$$

2. Gælder ovenstaaende ogsaa i det Tilfælde, hvor $f(z)$ har en Pol af højere end første Orden i ζ?

3. Idet $\sinh x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ er den hyperbolske Sinus af x, skal man vise Formlerne

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sinh x} = \frac{\pi^2}{4}$$

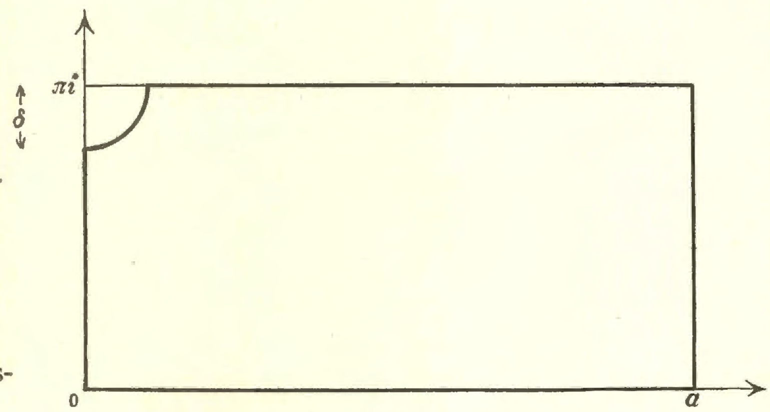
og

$$\lim_{0 \leftarrow \delta}\left(\int_0^{\pi-\delta}\frac{x\,dx}{\sin x} - \pi\int_\delta^\infty \frac{dx}{\sinh x}\right) = 0.$$

(Undersøg Integralet af Funktionen

$$f(z) = \frac{2z}{e^{z}-e^{-z}}$$

langs den paa Figuren viste Integrationsvej, idet $a \to \infty$ og $\delta \to 0$).



4. Bevis Formlen

$$\int_0^\pi \left(\frac{x}{\sin x} - \frac{x}{\pi - x}\right) dx = \pi\left(1 - \log\frac{\pi}{2}\right) = \log\left(\frac{2e}{\pi}\right)^{\pi}.$$

(Bevis først Formlen $\displaystyle\lim_{0 \leftarrow \delta}\left(\int_0^{\pi-\delta}\frac{x\,dx}{\sin x} + \pi\log\delta\right) = \pi\log 2$ ved Hjælp af den sidste af de i 3 udledte Formler, idet $\displaystyle\int_\delta^\infty \frac{dx}{\sinh x}$ udregnes elementært).

II.

En Mængdefunktion $F(E)$ tænkes defineret for de maalelige Delmængder E af et Interval i det n-dimensionale Rum. Angiv nødvendige og tilstrækkelige Betingelser for, at $F(E)$ er det ubestemte Integral af en Lebesgue integrabel Funktion, og gengiv i Hovedtræk Beviset for, at de paagældende Betingelser er tilstrækkelige.
