Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige Fakultets
matematisk-fysiske Faggruppe.

Fagprøven. Juni 1945.

Hovedfag Matematik.

Opgaver til Besvarelse i 4 Timer.

I.

Løsningerne (x, y) til Ligningen $x^2 - 7y^2 = 4$, hvor x og y skal betyde hele positive Tal, betegnes

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots \qquad (x_1 < x_2 < x_3 < \dots).$$

1) Vis, at alle x_n og alle y_n er lige Tal.
2) Find (x_1, y_1), (x_2, y_2) og (x_3, y_3).
3) Vis, at y_n er delelig med 96, naar n er lige.
4) Vis, at for $n \to \infty$ vil

$$\frac{x_n}{(8 + 3\sqrt{7})^n} \to 1.$$

II.

Find for ethvert helt $n > 0$ Værdien af det uegentlige Integral

$$\int \frac{(\log z)^n}{(z^2 - 1)(z^2 - 4)} dz,$$

hvor $\log z$ betegner Logaritmefunktionens Hovedværdi, og Integrationsvejen er den imaginære Akse fra $-i\infty$ til $i\infty$, over det singulære Punkt $z = 0$. (Integrer først langs en Vej sammensat af to Halvcirkler med Centrum 0 og Stykker af den imaginære Akse, og foretag saa en Grænseovergang.)

Vis ved Hjælp af det fundne Formlen

$$\int_0^\infty \frac{(\log y)^3}{(y^2 + 1)(y^2 + 4)} dy = -\frac{\pi}{12}(\log 2)^3 - \frac{\pi^3}{16}\log 2.$$
