Skoleembedseksamen i Matematik.

Fagprøven. Januar 1945.

Opgaver til Besvarelse i 4 Timer.

I.

1) Hvornaar kaldes en i en Punktmængde M i det n-dimensionale Rum defineret Funktion $f(X)$ opad halvkontinuert i M?

2) Vis, at en i en begrænset og lukket Mængde M endelig og opad halvkontinuert Funktion $f(X)$ er opad begrænset og antager sin øvre Grænse.

3) En i Rektanglet $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ defineret endelig Funktion $f(x, y)$ antages kontinuert i hver Variabel for enhver fastholdt Værdi af den anden. Vis, at $g(x) = \min\limits_{c \leqq y \leqq d} f(x, y)$ er en opad halvkontinuert Funktion af x i Intervallet $a \leqq x \leqq b$.

4) Angiv et Eksempel paa en Funktion $f(x, y)$ af den omhandlede Art, for hvilken $g(x)$ er diskontinuert.

II.

1) Vis, at Funktionen $f(z) = \dfrac{2e^{iz}}{e^z + e^{-z}}$ er meromorf i hele Planen, har Poler i Punkterne $\dfrac{2p+1}{2}\pi i$, $p = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, og i Polen $\dfrac{2p+1}{2}\pi i$ har Residuet $\dfrac{(-1)^p}{i} e^{-\frac{2p+1}{2}\pi}$. (Foretag en Parallelforskydning, saa at Polen falder i Begyndelsespunktet.)

2) Vis Formlen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\, dx = \frac{\pi}{\cosh \frac{\pi}{2}},$$

hvor cosh betegner hyperbolsk Cosinus. (Integrer Funktionen $f(z)$ langs Omkredsen af et Rektangel med Vinkelspidser $-a$, b, $b + \pi i$, $-a + \pi i$, og lad a og b gaa mod ∞.)
