Anders Thorup

Noter om differensligninger

Matematik 2DD, 2001

1. Om differentialligninger.

(1.1) Vi minder om .... Teorien for differensligninger kan med fordel belyses af teorien for differentialligninger, idet lysmængden dog afhænger af fortroligheden med den sidste teori. Her, i dette indledende kapitel, minder vi om en række begreber og resultater knyttet til differentialligninger.

En *sædvanlig differentialligning* er en ligning, hvori der indgår en ubekendt funktion og dens differentialkvotienter (af højere orden). Den almindelige *differentialligning af orden n* har formen,

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}, x^{(n)}) = 0, \tag{1.1.1}$$

hvor $F = F(t, y_0, \dots, y_n)$ er en funktion af $n + 2$ variable. I ligningen (1.1.1.) tænker vi på $x^{(i)}$ som den i'te afledede af en funktion $x = x(t)$, og det er af og til hensigstmæssigt at lade *differentieringsoperatoren* D, bestemt ved $Dx(t) = x'(t)$, indgå i notationen. Herved kan ligningen (1.1.1) alternativt skrives:

$$F(t, x, Dx, D^2x, \dots, D^{n-1}x, D^nx) = 0. \tag{1.1.2}$$

Ved en *løsning* til differentialligningen forstås en n gange differentialbel funktion $x = x(t)$, altid defineret på et reelt *interval* I, som for alle $t \in I$ opfylder ligningen,

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0. \tag{1.1.3}$$

Det er naturligvis underforstået, at $(n + 2)$-sættet $(t, x(t), \dots, x^{(n)}(t))$ tilhører definitionsmængden for F for alle $t \in I$.

Som nævnt betragtes kun funktioner $x(t)$ definerede for reelle værdier af t, og tallet t (førstekoordinaten) antages altid reel. Derimod kan det også i praksis være bekvemt at betragte funktioner $x(t)$ med komplekse værdier. Der er således essentielt to tilfælde: I *det reelle tilfælde* er F en reel funktion defineret på en åben delmængde af $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$; her skal løsningerne naturligvis være reelle funktioner $x : I \to \mathbb{R}$. I *det komplekse tilfælde* er F en kompleks funktion defineret på en åben delmængde af $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n+1}$; her er løsningerne komplekse funktioner $x : I \to \mathbb{C}$, og blandt dem kan vi specielt betragte eventuelle reelle funktioner.

Differentialligningen siges at være på *normalform*, hvis den er løst (eller helt oplagt kan løses) med hensyn til $x^{(n)}$, dvs hvis den kan omformes til en ligning af formen,

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}). \tag{1.1.4}$$

Nulteordens differentialligningen (1.1.1) har formen $F(t, x) = 0$. Den bestemmer x *implicit* som funktion af t. Bemærk også, at *førsteordens* og *andenordens* ligningerne på normalform er følgende:

$$x' = f(t, x), \qquad x'' = f(t, x, x').$$

Eksistens- og entydighedssætning. *For et givet t_0 og n givne værdier $x_0, \dots, x_{n-1}$ har ligningen* (1.1.4), *med en pæn funktion f, en og kun én løsning $x(t)$, defineret i et interval omkring t_0, som opfylder, at $x^{(i)}(t_0) = x_i$ for $i < n$.*

Det er naturligvis underforstået, at punktet $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1})$ ligger i definitionsmængden for f. Entydigheden betyder, at hvis to funktioner opfylder kravene i sætningen, så er de ens i det fælles interval omkring t_0, hvor de begge er defineret.

Sætningen har kun indhold for den der ved, hvad en pæn funktion er. Lad os understrege, at kontinuitet er nok til at sikre eksistens af løsninger, men ikke entydighed. Kontinuerte funktioner er altså ikke „pæne" nok. Det er et nyttigt resultat, at kontinuert differentiable funktioner er pæne.

(1.2) Lineære ligninger. Differentialligningen (1.1.1) kaldes *lineær*, hvis funktionen F, som funktion af de sidste $n+1$ variable (og for en fast værdi af t) er af formen: en lineær funktion plus en konstant. Ækvivalent betyder det, at differentialligningen har formen

$$a_n(t)x^{(n)} + \cdots + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = h(t), \tag{1.2.1}$$

hvor $a_0, \dots, a_n$ og h er funktioner definerede på et interval I. Ligningen er *normeret*, dvs på normalform, hvis $a_n(t) = 1$ for alle t, og den kan *normeres*, hvis $a_n(t) \neq 0$ for alle t.

Bemærk, at ligningens venstreside, med givne kontinuerte funktioner $a_i(t)$, kan opfattes som en afbildning $x \mapsto L(x)$, der til funktionen x knytter funktionen $L(x)$ givet ved venstresiden, fx som afbildning $L\colon \mathcal{C}^n(I) \to \mathcal{C}(I)$ eller $L\colon \mathcal{C}^\infty(I) \to \mathcal{C}^\infty(I)$ (hvis funktionerne $a_i(t)$ er $\mathcal{C}^\infty$-funktioner). Det er klart, at afbildningen L er lineær.

I det følgende antager vi, at ligningen er normeret. Med denne antagelse kan man bevise, at alle løsninger til differentialligningen er definerede på hele intervallet I. Det følger, at løsningsmængden til differentialligningen er originalmængden $L^{-1}(h)$ til den givne funktion h. Specielt er løsningsmængden til den *homogene ligning*, dvs ligningen med $h = 0$, altså netop kernen for L. Elementære resultater om lineære afbildninger giver nu strukturen af løsningsmængden: Løsningerne til den homogene ligning udgør et underrum $\mathcal{H}$ af funktionsrummet $\mathcal{C}^n(I)$. Løsningerne til den inhomogene ligning, med en given højreside h, fås ved til én løsning (en *partikulær løsning*) at lægge samtlige løsninger til den homogene ligning.

Betragt et fast $t_0 \in I$. Afbildningen $x \mapsto (x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0))$, der til en funktion $x \in \mathcal{C}^n(I)$ knytter n-sættet af værdier i t_0 af de første n afledede, er en lineær afbildning fra funktionsrummet til talrummet. Af Eksistens- og entydighedssætningen følger, at hvis vi indskrænker til at betragte funktioner x, der løser ligningen, så er afbildningen bijektiv. Specielt følger det, at afbildningen er en isomorfi fra vektorrummet $\mathcal{H}$ (af løsninger til den homogene ligning) til talrummet. Alle løsninger til den homogene ligning kan altså beskrives ved n lineært uafhængige løsninger $\rho_1, \dots, \rho_n$. For den inhomogene ligning kræves yderligere en partikulær løsning ψ. Herefter har den inhomogene ligning den fuldstændige (eller generelle) løsning:

$$x = \psi(t) + k_1\rho_1(t) + \cdots + k_n\rho_n(t),$$

hvor $k_1, \dots, k_n$ er *arbitrære* (dvs vilkårlige) konstanter.

Den lineære førsteordens ligning. *Betragt den lineære differentialligning af første orden, af formen,*

$$x' + b(t)x = h(t), \tag{1.2.2}$$

hvor $b(t)$ og $h(t)$ er kontinuerte funktioner på et interval I. Den generelle løsning fås da som følger: lad $B(t)$ være en stamfunktion til $b(t)$, dvs $B'(t) = b(t)$. Da er

$$x(t) = e^{-B(t)} \int e^{B(t)} h(t)\, dt + ke^{-B(t)},$$

hvor k er en vilkårlig konstant.

Bevis. Integralet, der indgår i løsningsformlen, er det ubestemte integral, der betegner „en eller anden stamfunktion" til integranden.

Vi bemærker først, at med $B = B(t)$ defineret ovenfor er det umiddelbart at efterprøve, at den homogene ligning $x' + bx = 0$ har $\rho(t) = e^{-B(t)}$ som løsning.

Dernæst bemærkes, at $\rho(t)$ er overalt forskellig fra 0. Enhver funktion $x(t)$ kan altså skrives på formen $x(t) = \rho(t)y(t)$; med en sådan fremstilling er $x(t)$ en løsning til (1.2.2), hvis og kun hvis $y(t)$ opfylder følgende ligning:

$$(\rho y)' + b(\rho y) = h. \tag{1.2.4}$$

Under brug af $\rho' + b\rho = 0$ kan venstresiden i (1.2.4) reduceres til $\rho y'$; altså gælder (1.2.4), hvis og kun hvis $\rho y' = h$, dvs hvis og kun hvis $y' = h/\rho$. Den sidste ligning kan integreres: $y = \int h(t)/\rho(t)\, dt + k$, og heraf fås den søgte formel, da $x = \rho y$. □

(1.3) Den lineære homogene andenordens ligning. På normalform er det ligningen,

$$x'' + b(t)x' + c(t)x = 0, \tag{1.3.1}$$

hvor $b(t)$ og $c(t)$ er kontinuerte funktioner definerede på et givet interval I. Som nævnt udgør løsningerne til den homogene ligning et 2-dimensionsionalt underrum af funktioner på I, men det skal understreges, at ligningen *ikke*, i almindelighed, kan integreres, dvs der findes ingen metode, der reducerer problemet med at bestemme løsninger til et problem om stamfunktioner. Specielt findes ingen explicit formel, der angiver løsninger.

Hvis ligningen har *konstante koefficienter*, dvs hvis funktionerne b og c (men ikke nødvendigvis $h(t)$) er konstante, kan løsningerne *til den homogene ligning* direkte angives: Til ligningens venstreside knyttes følgende *karakteristiske polynomium* (af grad 2):

$$z^2 + bz + c.$$

Det har to rødder, λ_1 og λ_2, kaldet de *karakteristiske rødder* for differentialligningen. De er bestemt ved formlen,

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2},$$

hvor $D = b^2 - 4c$ er polynomiets *diskriminant*. Hvis koefficienterne b og c er reelle, vil løsningernes udseende afhænge af fortegnet for D. Hvis $D \geqslant 0$, er de karakteristiske rødder reelle, og de to funktioner,

$$e^{\lambda_1 t}, \quad e^{\lambda_2 t}, \tag{1}$$

er en basis for løsningerne til den homogene ligning. Hvis $D = 0$, er de to rødder ens, $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2$, og her er det de to funktioner,

$$e^{\lambda t}, \quad te^{\lambda t}, \tag{2}$$

der er en basis.

Antag endelig, at $D < 0$. I dette tilfælde er de karakteristiske rødder imaginære, dvs ikke reelle, og kvadratroden $\sqrt{D}$ skal tages i den komplekse betydning. De to funktioner i (1) er nu ikke reelle, og de er en $\mathbb{C}$-basis for rummet af komplekse løsninger til den homogene ligning. Reelle løsninger fås ved at separere i real- og imaginærdel: Skriv de to karakteristiske rødder på formen

$$\rho \pm i\omega,$$

hvor altså ρ er den fælles realdel ($= -b/2$), og $\pm\omega$ er imaginærdelen (bestemt ved $\omega^2 = -D$). Da er de to funktioner

$$e^{\rho t} \cos \omega t, \quad e^{\rho t} \sin \omega t, \tag{3}$$

en basis for løsningerne til den homogene ligning. Bemærk, at linearkombinationerne af disse to funktioner netop er funktionerne af formen

$$ke^{\rho t} \cos(\omega t + l),$$

hvor k og l er konstanter.

(1.4) De arbitrære konstanters variationsmetode. Løsningen af ligningen $x' + b(t)x = h(t)$ i (1.2) foregik efter følgende metode: Idet $B(t)$ er en stamfunktion til $b(t)$, er det bare at prøve efter, at $\rho(t) = e^{-B(t)}$ er en løsning til den homogene ligning $x' + b(t)x = 0$. Den generelle løsning til den homogene ligning er altså funktionerne $k\rho(t)$, hvor k er en arbitrær konstant. For at finde løsninger til den inhomogene ligning prøver vi her at „variere“ konstanten k, dvs vi erstatter konstanten k med en funktion af t. Med andre ord: Vi prøver om funktioner af formen $x(t) = y(t)\rho(t)$ løser den inhomogene ligning. Det giver typisk en differentialligning for funktionen y. Metoden virker, hvis denne differentialligning kan løses, — eller hvis den blot er simplere end den oprindelig ligning. Det var tilfældet i (1.2).

Vi prøver med den inhomogene ligning svarende til (1.3.1),

$$x'' + b(t)x' + c(t)x = h(t), \tag{1.4.1}$$

hvor altså højresiden i (1.3.1) er erstattet med en kontinuert funktion $h(t)$.

Sætning. *Den inhomogene ligning* (1.4.1) *kan løses fuldstændigt, hvis man kender en* (*ikke-triviel*) *løsning til den homogene ligning* (1.3.1).

Bevis. Antag, at $\rho(t)$ er en ikke-triviel løsning til den homogene ligning. For en funktion af formen $x = y\rho$, hvor $y = y(t)$, finder vi,

$$x = y\rho, \qquad x' = y'\rho + y\rho', \qquad x'' = y''\rho + 2y'\rho' + y\rho'',$$

og altså:

$$x'' + bx' + cx = y(\rho'' + b\rho' + c\rho) + (y''\rho + 2y'\rho' + by'\rho) = y''\rho + y'(2\rho' + b\rho).$$

Idet vi snyder lidt med eventuelle nulpunkter for $\rho(t)$, følger det, at $x = y\rho$ løser (1.4.1), hvis og kun hvis funktionen $y = y(t)$ løser følgende ligning:

$$y'' + \big(2\tfrac{\rho'(t)}{\rho(t)} + b(t)\big)y' = h(t)/\rho(t). \tag{1.4.2}$$

Denne ligning er en førsteordens ligning med funktionen y' som ubekendt. Derfor kan y' bestemmes som i (1.2), og herefter bestemmes y som stamfunktion til y'. Endelig fås x som $x = y\rho$. □

Metoden kan naturligvis specielt anvendes på den homogene ligning: Hvis man kender én løsning, giver metoden en yderligere (lineært uafhængig) løsning.

Bemærk også, at metoden specielt kan anvendes, når ligningen (1.4.1) har konstante koefficienter, idet løsningerne til den homogene ligning i dette tilfælde kan bestemmes.

(1.5) Eksempel. Betragt differentialligningen,

$$x'' + x = t. \tag{1.5.1}$$

Øjensynlig løser $\rho = \sin t$ den homogene ligning, så ligningen (1.4.2) er følgende:

$$y'' + \frac{2\cos t}{\sin t}y' = \frac{t}{\sin t}\,.$$

Funktionen $B := 2\ln\sin t$ er stamfunktion til $2\cos t/\sin t$, og $e^B = \sin^2 t$. Af (1.2) fås derfor, at

$$y' = \sin^{-2} t \int t\sin t\,dt + k\sin^{-2} t.$$

Her er $\int t\sin t\,dt = -t\cos t + \sin t$, og dermed er

$$y' = \frac{\sin t - t\cos t}{\sin^2 t} + \frac{k}{\sin^2 t}.$$

Integration giver

$$y = \frac{t}{\sin t} - \frac{k\cos t}{\sin t} + l\,.$$

Endelig med $x = y\sin t$ får vi den fuldstændige løsning til (1.5.1),

$$x = t - k\cos t + l\sin t.$$

Nyd, hvordan vi undervejs ikke bekymrede os om nulpunkter for $\sin t$ eller for fortegnet for $\sin t$ (som burde bekymre i $\log\sin t$). Hvorfor var det berettiget, at vi bare regnede løs?

2. Om differensligninger.

(2.1) Differensligninger. Betragt reelle eller komplekse funktioner $x = x(t)$, defineret for heltalsværdierne $t = 0, 1, 2, \dots$. På sådanne funktioner virker *differensoperatoren* Δ, defineret ved $\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$. Funktionerne er blot talfølger $x(0), x(1), x(2), x(3), \dots$ (og vi kalder dem *følger*). *Differensligninger* er ligninger,

$$G(t, x, \Delta x, \dots, \Delta^n x) = 0,$$

hvori der indgår en ubekendt følge $x = x(t)$ og dens „højere" differenser $\Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^n x$. Differensoperatoren Δ kan udtrykkes ved *translationsoperatoren* τ, defineret ved $\tau x(t) = x(t+1)$, idet vi øjensynlig har de to formler,

$$\Delta = \tau - I, \quad \tau = \Delta + I;$$

her er I identitetsoperatoren. Bemærk, at potensen τ^n er bestemt ved $\tau^n x(t) = x(t+n)$. Ved hjælp af de to formler (og Binomialformlen), kan potenserne Δ^n udtrykkes ved potenserne $I, \tau, \dots, \tau^n$, og omvendt. Det følger, at differensligninger nøje svarer til *rekursive ligninger*, dvs ligninger af følgende form:

$$F(t, x, \tau x, \tau^2 x, \dots, \tau^n x) = 0. \tag{2.1.1}$$

Vi vil følge almindelig praksis og omtale ligningen (2.1.1) som en *differensligning*. Ved en *løsning* til differensligningen forstås en følge $x = x(t)$, defineret for $t = 0, 1, 2, \dots$, som for alle t opfylder ligningen,

$$F(t, x(t), x(t+1), x(t+2), \dots, x(t+n)) = 0. \tag{2.1.2}$$

Det er naturligvis underforstået, at $(n+2)$-sættet $(t, x(t), \dots, x(t+n))$ tilhører definitionsmængden for F for alle t.

Differensligningen er på *normalform*, hvis den er løst (eller helt oplagt kan løses) med hensyn til $\tau^n x$, dvs hvis den kan omformes til en ligning af formen,

$$\tau^n x = f(t, x, \tau x, \dots, \tau^{n-1} x), \tag{2.1.3}$$

altså

$$x(t+n) = f(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+n-1)) \quad \text{for } t = 0, 1, 2, \dots. \tag{2.1.4}$$

Naturligvis kan man i forbindelse med differensligninger også bruge den mere sædvanlige notation $x_0, x_1, x_2, \dots$ for en talfølge. Med denne notation får differensligningerne følgende form:

$$F(t, x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+n}) = 0,$$
$$x_{t+n} = f(t, x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+n-1}).$$

Eksistens- og entydighedssætning. *For n givne værdier $x_0, \dots, x_{n-1}$ har ligningen* (2.1.3) *en og kun en løsning $x(t)$, som opfylder, at $x(i) = x_i$ for $i < n$.*

Denne sætning er naturligvis aldeles triviel (og den er ikke helt sand): Begyndelsesværdierne bestemmer værdien $x(t)$ for $t = 0, \dots, n-1$, dernæst bestemmes værdierne $x(n), x(n+1), x(n+2), \dots$ ved successivt at sætte $t := 0, 1, 2, \dots$ i (2.1.4). Det skal naturligvis undersøges inden hver skridt, at $(t, x(t), \dots, x(t+n-1))$ tilhører definitionsmængden for f. Er denne betingelse ikke opfyldt, har ligningen ingen løsninger.

Det skal i øvrigt tilføjes, at det slet ikke er oplagt, hvad der menes med at „løse" differensligningen. Betragt fx de to simpleste differensligninger [med begyndelsesbetingelse],

$$\tau x = x + a(t) \quad [x_0 = 0], \qquad \tau x = a(t)x \quad [x_0 = 1],$$

altså udførligt:

$$x(t+1) = x(t) + a(t), \quad x(t+1) = a(t)x(t);$$

her er $a(t)$ en given følge. Hvis $a(t) = a$ er konstant, har den første ligning øjensynlig løsningen $x(t) = ta$ og den anden løsningen $x(t) = a^t$. Hvis $a(t)$ ikke er konstant, er løsningerne mere komplicerede:

$$x(t) = a(0) + \cdots + a(t-1), \quad \text{og} \quad x(t) = a(0) \cdots a(t-1).$$

Vi opfatter disse to udtryk som eksplicitte formler til bestemmelse af løsningen, men det skal understreges, at der i begge udtrykkene optræder „$\cdots$", og at selve differensligningerne (for en formalist) faktisk er den egentlige definition af udtrykkene.

(2.2) Lineære ligninger. Den *lineære differensligning* af *orden n* har formen

$$a_n(t)\tau^n x + a_{n-1}(t)\tau^{n-1}x + \cdots + a_1(t)\tau x + a_0(t)x = h(t), \tag{2.2.1}$$

hvor koefficienterne $a_i(t)$ og højresiden $h(t)$ er givne følger. Den er *homogen*, hvis $h(t) = 0$ for alle t. Vi antager i det følgende, at ligningen er *normeret*, dvs at følgen $a_n(t)$ er konstant lig med 1.

Venstresiden, som funktion $x \mapsto L(x)$ af følgen x, er en lineær afbildning fra vektorrummet $\mathcal{F}$ (af alle følger) ind i sig selv. Heraf følger en række elementære resultater om løsningernes struktur: Løsningsmængden $\mathcal{H}$ til den homogene ligning er kernen for L, og specielt er det et underrum af $\mathcal{F}$. Af Eksistens- og entydighedssætningen følger, at afbildningen,

$$x \mapsto (x(0), x(1), \dots, x(n-1)),$$

der til en løsning $x \in \mathcal{H}$ knytter sættet af følgens n første værdier, er en bijektiv afbildning fra $\mathcal{H}$ til det n-dimensionale talrum. Det er øjensynlig en lineær afbildning, og dermed en isomorfi. Løsningsmængden til den homogene ligning er altså et vektorrum af dimension n. Ud fra n lineært uafhængige følger $\rho_1, \dots, \rho_n$, som løser den homogene ligning, og en partikulær løsning $x = \psi$ til (2.2.1), får vi den *generelle løsning* til (2.2.1) som

$$x(t) = \psi(t) + k_1\rho_1(t) + \cdots + k_n\rho_n(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

hvor $k_1, \dots, k_n$ er arbitrære konstanter.

(2.3) Den lineære førsteordens ligning. *Betragt den lineære differensligning af første orden, af formen,*

$$\tau x + b(t)x = h(t), \quad \textit{eller} \quad x(t+1) + b(t)x(t) = h(t), \tag{2.3.1}$$

hvor $b(t)$ og $h(t)$ er givne følger. Med en given begyndelsesværdi x_0 er løsningen bestemt ved formlen,

$$x(t) = (-1)^t b(t-1)\cdots b(1)b(0)x_0 + \sum_{s=0}^{t-1}(-1)^{t-s-1}b(t-1)\cdots b(s+1)h(s); \tag{2.3.2}$$

leddet i summen svarende til s har $t-s-1$ faktorer $b(j)$. Specielt er leddet svarende til $s = t-1$ lig med $h(t-1)$.

Hvis følgen $b(t)$ er en konstant b, reduceres udtrykket til

$$x(t) = (-1)^t b^t x_0 + \sum_{s=0}^{t-1}(-1)^{t-s-1}b^{t-s-1}h(s)\,. \tag{2.3.3}$$

og hvis også følgen $h(t)$ er konstant, reduceres det yderligere.

(2.4) Den lineære andenordens ligning med konstante koefficienter. Til differensligningen, af formen $\tau^2 x + b\tau x + cx = h(t)$, altså

$$x(t+2) + bx(t+1) + cx(t) = h(t), \tag{2.4.1}$$

hvor b og c er konstanter, hører det *karakteristiske polynomium* af grad 2,

$$P(z) = z^2 + bz + c,$$

der har diskriminanten $D = b^2 - 4c$. De to *karakteristiske rødder* er bestemt ved udtrykkene,

$$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}\,.$$

Antag, at rødderne er forskellige fra 0, lad λ være den ene rod, fx bestemt ved fortegnet + i formlen, og lad μ være den anden. Det er let at se, at følgen λ^t er løsning til den homogene ligning. Når $\lambda \neq \mu$ er det let at se, at følgerne λ^t og μ^t er lineært uafhængige løsninger til den homogene ligning. De udgør altså en basis for løsningerne til den homogene ligning. Når $\mu = \lambda$, er det let at se, at også $t\lambda^t$ er en løsning til den homogene ligning, og at denne følge sammen med λ^t er en basis.

Indsættes følgen $x(t) = \nu^t$ i venstresiden af (2.4.1) fås udtrykket,

$$\nu^{t+2} + b\nu^{t+1} + c\nu^t = (\nu^2 + b\nu + c)\nu^t,$$

altså $P(\nu)\nu^t$. Hvis ν ikke er en af de karakteristiske rødder λ, μ, dvs hvis $P(\nu) \neq 0$, så viser udregningen, at følgen $P(\nu)^{-1}\nu^t$ løser den inhomogene ligning (2.4.1) med $h(t) = \nu^t$.

Betragt det reelle tilfælde (dvs $b, c \in \mathbb{R}$). Hvis diskriminanten D er positiv, giver de fundne følger en fuldstændig beskrivelse af de reelle løsninger til differensligningen. Hvis $D < 0$, kan de fundne løsninger til den homogene ligning separeres i real- og imaginærdel således: De to rødder er konjugerede, og har specielt samme modulus, $r = |\lambda| = |\mu|$, og da röddernes produkt er c, er $r = \sqrt{c}$. Vi har altså $\lambda = re^{i\theta}$ (og $\mu = re^{-i\theta}$). Det følger, at real- og imaginærdel af λ^t, altså de to følger,

$$r^t \cos\theta t, \qquad r^t \sin\theta t\,, \tag{2.4.4}$$

er en basis for vektorrummet af reelle løsninger til den homogene ligning.

(2.5) Eksempel. Lad os prøve at løse ligningen (2.4.1) med „de arbitrære konstanters variationsmetode“. Vi antager i det følgende, at $c \neq 0$, altså at begge rødder λ, μ i det karakteristiske polynomium $P(z)$ er forskellige fra 0. Enhver følge $x(t)$ har da formen $x(t) = \lambda^t y(t)$ med en følge $y(t)$. Indsæt $x(t) = \lambda^t y(t)$ i venstresiden af (2.4.1). Da $\lambda + \mu = -b$ og $\lambda\mu = c$ får vi:

$$\lambda^t(\lambda^2 y(t+2) + b\lambda y(t+1) + cy(t)) = \lambda^{t+1}\big(\lambda(y(t+2) - y(t+1)) - \mu(y(t+1) - y(t))\big).$$

Heraf ses, at følgen $x(t) = \lambda^t y(t)$ løser ligningen (2.4.1), hvis og kun hvis

$$y(t+1) - y(t) =: z(t) \tag{2.5.1}$$

løser følgende førsteordens ligning:

$$\lambda z(t+1) - \mu z(t) = h(t)/\lambda^{t+1}. \tag{2.5.2}$$

Vi gennemfører regningerne i tilfældet, hvor følgen $h(t)$ i (2.4.1) har formen $h(t) = d\nu^t$ med konstanter d og ν, hvor ν *ikke* er karakteristisk rod. Idet (2.5.2) normeres ved division med λ, bliver højresiden $(d/\lambda^2)(\nu/\lambda)^t$, og løsningen fås af (2.3) med $b := -\mu/\lambda$. Vi får

$$z(t) = (\mu/\lambda)^t z_0 + \frac{d}{\lambda^2}\sum_{i=0}^{t-1}(\mu/\lambda)^{t-i-1}(\nu/\lambda)^i.$$

Sættes faktoren $(\mu/\lambda)^{t-1}$ uden for parentes i summen, kan vi summere den geometrisk række:

$$z(t) = (\mu/\lambda)^t z_0 + \frac{d\mu^{t-1}}{\lambda^2\lambda^{t-1}} \cdot \frac{(\nu/\mu)^t - 1}{\nu/\mu - 1} = (\mu/\lambda)^t k_0 + \frac{d}{\lambda^{t+1}} \cdot \frac{\nu^t}{\nu - \mu}.$$

Dernæst løses (2.5.1) med denne følge $z(t)$: Af løsningsformlen (2.3.3), med $b = -1$, fås

$$y(t) = y_0 + k_0\frac{(\mu/\lambda)^t - 1}{\mu/\lambda - 1} + \frac{d}{\lambda(\nu - \mu)}\,\frac{(\nu/\lambda)^t - 1}{\nu/\lambda - 1} = k_1 + k_2(\mu/\lambda)^t + \frac{d(\nu/\mu)^t}{(\nu - \mu)(\nu - \lambda)}.$$

Endelig, idet $x(t) = y(t)\lambda^t$ fås den generelle løsning til (2.4.1), med $h(t) = d\nu^t$:

$$x(t) = k_1\lambda^t + k_2\mu^t + \frac{d\nu^t}{(\nu - \mu)(\nu - \lambda)}\,.$$

Løsningen af (2.5.1) forudsatte, at $\lambda \neq \mu$. Hvis $\lambda = \mu$, bidrager leddet $(\mu/\lambda)^t$ i $z(t)$ kun med 1, og de to første led i $y(t)$ får formen $y_0 + k_0 t$. Den generelle løsning $x(t)$ bliver:

$$x(t) = k_1\lambda^t + k_2 t\lambda^t + \frac{d\nu^t}{(\nu - \mu)(\nu - \lambda)}\,.$$

Bemærk, at det karakteristiske polynomium kan faktoriseres, $P(z) = (z - \lambda)(z - \mu)$, så produktet $(\nu - \mu)(\nu - \lambda)$, der indgår i formlerne, er værdien $P(\nu)$.

Naturligvis genfindes med metoden resultaterne fra (2.4).

(2.6) Definition. I differensligningen af orden n, på normalformen (2.1.3), er højresiden givet ved en funktion af $n+1$ variable, lad os sige $f(t, v_1, \dots, v_n)$. De sidste variable v_i kan være reelle eller komplekse, den første variabel kan antage værdierne $t = 0, 1, 2, \dots$. Ofte opstår afhængigheden af t på følgende måde: Der er givet en funktion $g(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n)$ af $k + n$ reelle (eller komplekse) variable, og funktionen f fås ved at indsætte k givne følger $u_j(t)$ for de første k variable u_j i g. Differensligningen får altså formen,

$$\tau^n x = g(u_1(t), \dots, u_k(t), x, \tau x, \dots, \tau^{n-1}x). \tag{2.6.1}$$

De variable $u_1, \dots, u_k$ kaldes de *eksogene variable*.

Det er ikke udelukket, at $k = 0$, altså at differensligningen har formen

$$\tau^n x = f(x, \tau x, \dots, \tau^{n-1}x).$$

En sådan differensligning kaldes også *autonom*. Et eksempel er den lineære differensligning med konstante koefficienter og en konstant højreside.

Bemærk, at formen (2.6.1) er overordentlig generel. Fx fås den almindelige normerede lineære differensligning (2.2.1) ud fra funktionen (i $1 + n + n$ variable):

$$g(u, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) = u - u_1 v_1 - \cdots - u_n v_n,$$

ved at indsætte $(u, u_1, \dots, u_n) = (h(t), a_0(t), \dots, a_{n-1}(t))$.

3. Systemer af differensligninger.

(3.1) Differensligningssystemer. I den almindelige differensligning behandlet i paragraf 2 er den ubekendte en følge $x(t)$ af (reelle eller komplekse) tal. Mere generelt møder man ofte differensligninger, hvor den ubekendte er en følge af vektorer i talrummet V. Her – og overalt i det følgende – betegner V enten det reelle vektorrum $\mathbb{R}^n$ (det reelle tilfælde) eller det komplekse vektorrum $\mathbb{C}^n$ (det komplekse tilfælde). En vektor er altså et n-sæt $\mathbf{x}$ af tal x_i. Vektoren opfattes altid som en søjle(matrix), men kan naturligvis angives som den transponerede af en række:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{tr}}.$$

Indices vil typisk blive brugt til at nummerere vektorers koordinater. I overensstemmelse hermed vil en følge af vektorer altid blive skrevet på formen $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots$, eller som $\mathbf{x}(t)$, hvor det her og i det følgende er underforstået, at t kan have værdierne $0, 1, 2, \dots$. Følgen $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots$ af vektorer kan opfattes som et sæt af n talfølger $x_i(0), x_i(1), \dots$ (koordinatfølgerne). Translationsoperatoren τ for vektorfølger defineres som for talfølger: $\tau\mathbf{x}$ er følgen af vektorer bestemt ved $\tau\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$, altså følgen $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots$.

På normalform har *differensligningen af orden p for vektorfølger* formen,

$$\tau^p\mathbf{x} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \tau\mathbf{x}, \dots, \tau^{p-1}\mathbf{x}), \tag{3.1.1}$$

altså

$$\mathbf{x}(t+p) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t+1), \dots, \mathbf{x}(t+p-1)); \tag{3.1.2}$$

det er underforstået, at den sidste ligning skal gælde for *alle* $t = 0, 1, 2, \dots$. Afbildningen $\mathbf{f}$ er defineret på en delmængde af $\{0, 1, 2, \dots\} \times V^p$, med værdier i V.

Specielt har en *førsteordens vektordifferensligning* formen,

$$\tau\mathbf{x} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \text{altså} \quad \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)). \tag{3.1.3}$$

Den kaldes *lineær*, hvis den har formen,

$$\tau\mathbf{x} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{h}(t), \quad \text{altså} \quad \mathbf{x}(t+1) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}(t), \tag{3.1.4}$$

hvor $A(0), A(1), A(2), \dots$ er en følge af $n \times n$-matricer og $\mathbf{h}(0), \mathbf{h}(1), \mathbf{h}(2), \dots$ er en følge af vektorer (søjler).

En vektorfølge $\mathbf{x}(t)$ svarer til sættet af n koordinatfølger $x_i(t)$, og funktionen $\mathbf{f}$ har n koordinatfunktioner f_i. Differensligningen (3.1.3) svarer herved til et *differensligningssystem* af n (koblede) ligninger for n talfølger $x_1, \dots, x_n$,

$$\begin{aligned} \tau x_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \tau x_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Differensligninger for vektorfølger vil vi kort kalde *vektorligninger*. I modsætning hertil kan ligningerne i paragraf 2, for talfølger, også kaldes *skalarligninger*. Gyldigheden af Eksistens- og entydighedssætning for vektorfølger indses ganske som for skalarfølger.

(3.2) Observation. *Den normerede skalarligning af orden* n,

$$\tau^n x = f(t, x, \dots, \tau^{n-1} x),$$

er ækvivalent med en vektorligning af orden 1:

$$\tau x_1 = x_2, \quad \tau x_2 = x_3, \quad \dots, \quad \tau x_{n-1} = x_n, \quad \tau x_n = f(t, x_1, \dots, x_n),$$

i følgende forstand: løsningerne til vektorligningen er netop vektorfølgerne af formen $\mathbf{x} = (x, \tau x, \dots, \tau^{n-1} x)^{\mathrm{tr}}$, *hvor talfølgen* x *er en løsning til skalarligningen.*

Resultatet er blot en simpel observation: For en vektorfølge $\mathbf{x}$ udsiger de $n-1$ første ligninger i systemet, at $x_2 = \tau x_1$, at $x_3 = \tau x_2 = \tau^2 x_1, \dots,$ og at $x_n = \tau^{n-1} x_1$. Den n'te og sidste ligning i systemet er herefter opfyldt, hvis og kun hvis skalarligningen er opfyldt for $x = x_1$.

Bemærk, at en begyndelsesbetingelse for skalarligningen, $x(i) = x_i$ for $i = 0, \dots, n-1$ med givne tal $x_0, \dots, x_{n-1}$, svarer til begyndelsesbetingelsen for vektorligningen, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ med $\mathbf{x}_0 = (x_0, \dots, x_{n-1})^{\mathrm{tr}}$.

For den generelle *lineære* (normerede) skalarligning af orden n,

$$\tau^n x + a_{n-1}(t)\tau^{n-1} x + \dots + a_1(1)\tau x + a_0(t) x = h(t), \tag{3.2.1}$$

hvor koefficienterne og højresiden er givne følger, $a_i(t)$ og $h(t)$, bliver den tilsvarende vektorligning af orden 1 lineær, af formen i (3.1.4) med

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}. \tag{3.2.2}$$

Den generelle normerede vektorligning af højere orden (som i (3.1.1) af orden p i n koordinater) kan tilsvarende „reduceres" til en førsteordens ligning, denne gang i pn koordinater. Som følge af denne observation vil vi udelukkende betragte vektorligninger af første orden.

(3.3) Den lineære differensligning. Den lineære vektorligning med begyndelsesbetingelse:

$$\mathbf{x}(t+1) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{3.3.1}$$

har øjensynlig den entydigt bestemte løsning,

$$\mathbf{x}(t) = A(t-1)\cdots A(0)\mathbf{x}_0 + \sum_{0 \leqslant s < t} A(t-1)\cdots A(s+1)\mathbf{h}(s). \tag{3.3.2}$$

Leddet svarende til index s i summen har $t - s - 1$ faktorer $A(j)$; specielt, for $s = t-1$, er leddet lig med $\mathbf{h}(t-1)$.

(3.4) Sætning. *Løsningsmængden, $\mathcal{L}$, til den homomogene lineære ligning $\tau\mathbf{x} = A(t)\mathbf{x}$ er et underrum af vektorrummet bestående af alle følger i V, og afbildningen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}(0)$, der til en følge $\mathbf{x}$ i $\mathcal{L}$ lader svare vektoren $\mathbf{x}(0)$, er en isomorfi $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} V$. Specielt har $\mathcal{L}$ dimensionen n, og et sæt af n løsninger $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ er en basis for $\mathcal{L}$, hvis og kun hvis $n \times n$-matricen,*

$$(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)), \tag{3.4.1}$$

er invertibel for $t = 0$.

Bevis. Det er klart, at $\mathcal{L}$ er et underrum i vektorrummet af alle følger i V. Det er klart, at afbildningen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}(0)$ er lineær. Af (3.3), som jo specielt er en eksistens- og entydighedssætning, følger, at afbildningen er bijektiv. Altså er den en isomorfi.

Den sidste påstand er en konsekvens, idet n vektorer i V, dvs n søjler, er en basis for det n-dimensionale talrum V, hvis og kun hvis matricen med de n søjler er invertibel. □

Matricen (3.4.1) svarende til et sæt af løsninger, som udgør en basis for $\mathcal{L}$, kaldes sættets *fundamentalmatrix*. Af løsningsformlen (3.3.2) ses, at løsningerne til den homogene ligning er følgerne af formen,

$$\mathbf{x}(t) = A(t-1)\cdots A(1)A(0)\mathbf{x}_0,$$

hvor $\mathbf{x}_0$ er en vektor i V. Vi får altså n lineært uafhængige løsninger ved som begyndelsesvektorer at tage n lineært uafhængige vektorer $\mathbf{x}_{01}, \dots, \mathbf{x}_{0n}$. Den tilhørende fundamentalmatrix bliver da matrixproduktet,

$$A(t-1)\cdots A(1)A(0)(\mathbf{x}_{01}, \dots, \mathbf{x}_{0n}).$$

Specielt kan vi som de n begyndelsesvektorer $\mathbf{x}_{i0}$ tage den kanoniske basis for talrummet V. Matricen $(\mathbf{x}_{01}, \dots, \mathbf{x}_{0n})$ bliver så enhedsmatricen, og den tilhørende fundamentalmatrix bliver produktet,

$$\Phi(t) := A(t-1)\cdots A(1)A(0). \tag{3.4.2}$$

Omvendt, hvis $\Phi(t)$ er defineret ved (3.4.2), kan løsningen til den homogene ligning med begyndelsesbetingelse angives eksplicit:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0. \tag{3.4.3}$$

Bemærk, at $\Phi(t)$ er invertibel, hvis og kun hvis matricerne $A(j)$ for alle $j < t$ er invertible. Er alle matricerne $A(j)$ invertible, kan løsningen til den inhomogene ligning angives ved udtrykket,

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \sum_{0 \leqslant s < t} \Phi(s+1)^{-1}\mathbf{h}(s). \tag{3.4.4}$$

(3.5) Konstante koefficienter. I det følgende betragtes den lineære differensligning med en fast (konstant) $n \times n$-matrix A. Det karakteristiske polynomium for A kan faktoriseres (Algebraens Fundamentalsætning),

$$p_A(z) = \det(zI - A) = \prod_{k=1}^{r}(z - \lambda_k)^{n_k}\,; \tag{3.5.1}$$

tallene λ_k er altså de *komplekse* (forskellige) egenværdier for matricen A, og eksponenterne n_k er deres multiplicitet.

Fundamentalmatricen i (3.4.2) er $\Phi(t) = A^t$. Af udregningerne i (3.4) får vi derfor følgende:

Sætning. *Den homogene ligning* $\tau\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, *altså* $\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$, *med begyndelsesbetingelse* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ *har den entydigt bestemte løsning,*

$$\mathbf{x}(t) = A^t\mathbf{x}_0. \tag{3.5.2}$$

Den inhomogene ligning $\tau\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)$, *altså* $\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}(t)$, *med begyndelsesbetingelse* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ *har den entydigt bestemte løsning,*

$$\mathbf{x}(t) = A^t\mathbf{x}_0 + \sum\nolimits_{s=0}^{t-1} A^s\mathbf{h}(t-s-1). \tag{3.5.3}$$

Specielt, hvis højresiden i ligningen er en konstant vektor $\mathbf{h}$, så har den inhomogene ligning den partikulære løsning,

$$\mathbf{x}(t) = \Big(\sum\nolimits_{s=0}^{t-1} A^s\Big)\mathbf{h}. \tag{3.5.4}$$

Multipliceres summen i (3.5.4) med matricen $A - I$ fås matricen $A^t - I$. Hvis $A - I$ er invertibel, dvs hvis $\lambda = 1$ ikke er egenværdi for A, så følger det, at summen er lig med $(A^t - I)(A - I)^{-1}$.

Hvis søjlen $\mathbf{x}_0$ er egenvektor for A svarende til egenværdien λ, dvs $A\mathbf{x}_0 = \lambda\mathbf{x}_0$, så får løsningen (3.5.2) formen

$$\mathbf{x}(t) = \lambda^t\mathbf{x}_0.$$

Heraf ses, at hvis A er diagonaliserbar, og talrummet V altså har en basis $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ bestående af egenvektorer for A (med egenværdier λ_j), så får vi en fundamentalmatrix, hvis j'te søjle er $\lambda_j^t\mathbf{v}_j$:

$$A^t(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = (\lambda_1^t\mathbf{v}_1, \dots, \lambda_n^t\mathbf{v}_n) = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)\mathrm{diag}(\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t).$$

Bemærk, at i almindelighed fortæller det elegante udtryk (3.5.2) ikke ret meget om løsningens i'te koordinat $x_i(t)$. I det følgende gennemgås to metoder, der giver en mere eksplicit beskrivelse af A^t.

(3.6) Metode I. Den væsentlige ingrediens i den ene metode er resultatet i lærebogen [A&B, 2.4, side 117–118]: Med bogens notation findes en invertibel matrix T (med komplekse koefficienter) således, at $T^{-1}AT$ er blokmatricen [A&B, formel (16), side 118],

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 I + N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 I + N_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r I + N_r \end{pmatrix}, \tag{3.6.1}$$

hvor de enkelte (kvadratiske) blokke ned langs diagonalen er af formen $\lambda I + N$ med en nilpotent matrix N. Faktisk er den k'te blok en $n_k \times n_k$-matrix og $N_k^{n_k} = 0$. Bemærk, at også 0'erne i matricen er blokke, nemlig nul-matricer af varierende størrelse.

Er $T^{-1}AT = B$, og er potensen B^t bestemt, så bestemmes A^t ved at transformere tilbage: $A^t = TB^tT^{-1}$. Det er derfor nok at behandle tilfældet, hvor matricen A har blokformen på højresiden af (3.6.1). For denne matrix på blokformen fås den t'te potens ved at opløfte hver blok i diagonalen til t'te potens. Vi betragter derfor først tilfældet, hvor matricen B har formen $\lambda I + N$, hvor N er nilpotent, med $N^n = 0$. Matricen λI kommuterer med enhver matrix (idet $(\lambda I)N = N(\lambda I) = \lambda N$). Af binomialformlen får vi derfor udtrykket,

$$(\lambda I + N)^t = \sum_{l=0}^{t} \binom{t}{l} \lambda^{t-l} N^l. \tag{3.6.2}$$

For $\lambda = 0$ har vi naturligvis trivielt, at

$$(\lambda I + N)^t = N^t \text{ for } t = 0, \dots, n-1, \text{ og } (\lambda I + N)^t = 0 \text{ for } t \geqslant n. \tag{3.6.3}$$

Antag dernæst, at $\lambda \neq 0$. I summationen i (3.6.2) er binomialkoefficienten lig med 0 for $l > t$, så vi kan erstatte den øvre summationsgrænse med $l = \infty$. Men vi kan nøjes med at summere til $l = n - 1$, da $N^n = 0$. Altså fås, for alle $t = 0, 1, \dots,$ udtrykket,

$$(\lambda I + N)^t = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{t(t-1)\cdots(t-l+1)}{l!\,\lambda^l}\,\lambda^t N^l. \tag{3.6.4}$$

Brøken er et polynomium i t, af grad l, og dermed af grad højst $n-1$. Heraf ses specielt, at *på hver plads i matricen* $(\lambda I + N)^t$ *står en linearkombination af følgerne* $t^l\lambda^t$, *for* $l = 0, \dots, n-1$.

For den generelle matrix A anvendes udtrykkene (3.6.3) og (3.6.4) på de enkelte blokke i den transformerede matrix. Herefter får man ved at transformere tilbage med T et udtryk for A^t. Den k'te blok i (3.6.1) er en $n_k \times n_k$-matrix, og $\lambda_k = 0$ forekommer som egenværdi, hvis og kun hvis det $A = 0$. Vi får derfor følgende resultat:

Resultat. *Metode I giver et eksplicit udtryk for følgerne på de enkelte pladser i matricen* A^t. *Specielt ses, når* det $A \neq 0$, *at der på hver plads står en linearkombination af de* n *følger,*

$$t^l\,\lambda_k^t, \quad \text{for } k = 1, \dots, r, \quad l = 0, \dots, n_k - 1. \tag{3.6.5}$$

En forfining af Metode I fremkommer ved at bruge, at en nilpotent matrix N er similær med en blokmatrix, hvor de enkelte kvadratiske blokke ned langs diagonalen er matricer med 1 på pladserne lige over diagonalen, og 0 på alle andre pladser. Dette resultat er Sætningen om Jordan's normalform, se Appendix A, men for anvendelsen af Metode I er det ofte tilstrækkeligt at bruge normalformen (3.6.1).

(3.7) Polynomial approksimation. Den anden metode bygger på „polynomial approksimation", dvs på resultaterne i [A&B, Lemma 5 og Sats 4, side 96-97]: Lad $p(z) = p_A(z)$ være polynomiet af grad n med faktoriseringen i (3.5.1). Når $f(z)$ er en hel funktion, findes et polynomium $q(z)$ af grad højst $n-1$ og en ligning,

$$f(z) = g(z)p(z) + q(z),$$

med en hel funktion $g(z)$. Polynomiet $q(z)$ er det eneste polynomium af grad højst $n-1$, dvs af formen,

$$q(z) = q_0 + q_1 z + \cdots + q_{n-1} z^{n-1}, \tag{3.7.1}$$

som opfylder de n ligninger,

$$\frac{d^l q}{dz^l}(\lambda_k) = \frac{d^l f}{dz^l}(\lambda_k) \quad \text{for } k = 1, \ldots, r, \quad l = 0, \ldots, n_k - 1\,. \tag{3.7.2}$$

Ligningerne i (3.7.2) er et lineært ligningssystem med tallene $q_0, \ldots, q_{n-1}$ som de ubekendte. Bemærk, at koefficienterne på ligningssystemets venstreside kun afhænger af rødderne λ_k og deres multipliciteter; det er kun i højresiden, at funktionen $f(z)$ indgår. Ligningerne fortæller i øvrigt om de to funktioner $q(z)$ og $f(z)$, at i deres Taylorrække omkring $z = \lambda_k$ er de første n_k led ens.

Polynomial approksimation anvendes til at bestemme matricen $f(A)$: Ifølge Cayley–Hamilton's sætning er matricen A rod i sit karakteristiske polynomium, $p_A(A) = 0$, og indsættelse i ligningen ovenfor giver derfor, at $f(A) = q(A)$. For øvrigt kan man ved approksimationen erstatte det karakteristiske polynomium $p_A(z)$ med et vilkårligt normeret polynomium $p(z)$, som opfylder, at $p(A) = 0$.

(3.8) Metode II. Den anden metode til bestemmelse af A^t anvender polynomial approksimation af funktionen $f(z) = z^t$. Højresiderne i ligningssystemet (3.7.2), for $\lambda_k \neq 0$, har altså formen,

$$t(t-1)\cdots(t-l+1)\lambda_k^{t-l} = \frac{t(t-1)\cdots(t-l+1)}{\lambda_k^l}\,\lambda_k^t;$$

specielt er hver af højresiderne en linearkombination af følgerne i (3.6.5). Det følger derfor af Cramer's formler, at også løsningerne, $q_j = q_j(t)$, til ligningssystemet er linearkombinationer af følgerne i (3.6.5). Med andre ord har vi bevist det følgende resultat, hvor vi igen antager, at $\lambda = 0$ ikke forekommer blandt egenværdierne for A.

Resultat. *Metode II giver, når* det $A \neq 0$, *en eksplicit fremstilling,*

$$A^t = q_0(t)I + q_1(t)A + \cdots + q_{n-1}(t)A^{n-1}, \tag{3.8.1}$$

hvor hver af talfølgerne $q_j(t)$ er en linearkombination af de n følger $t^l\,\lambda_k^t$ for $k = 1, \ldots, r$, $l = 0, \ldots, n_k - 1$.

Resultatet indeholder specielt resultatet fra Metode I. Bemærk, at begge metoder kan anvendes til at bestemme summen $\sum_{s=0}^{t-1} A^s$, som indgår i løsningen (3.5.4) til den inhomogene ligning, også når $A - I$ ikke er invertibel. Med polynomial approksimation betragtes funktionen,

$$f(z) = 1 + z + \cdots + z^{t-1} = (z^t - 1)/(z - 1).$$

De afledede $(d^l f/dz^l)(\lambda)$ for $\lambda \neq 1$ bestemmes ved at differentiere brøken på højresiden. For $\lambda = 1$ kan det betale sig at bruge omskrivningen,

$$f(z + 1) = \big((z + 1)^t - 1\big)/z = t + \binom{t}{2} z + \binom{t}{3} z^2 + \cdots ;$$

heraf kan ligningen $(d^l f/dz^l)(1) = t(t-1)\cdots(t-l)/(l+1)$ umiddelbart aflæses.

(3.9) Tricks. (1) Hvis det karakteristiske polynomium $p_A(z)$ har n *forskellige* rødder, dvs hvis $r = n$ og $n_k = 1$ for alle k, kan polynomiet $q(z)$ i (3.7.1) bestemmes som følger: Lad $p_j(z)$, for $j = 1, \dots, n$, være polynomiet $p_A(z)/(z - \lambda_j)$, altså det polynomium, der fås af $p_A(z) = \prod(z - \lambda_k)$ ved at fjerne den j'te faktor. Øjensynlig er $p_j(\lambda_k) = 0$ for $k \neq j$, og værdien $p_j(\lambda_j) = \prod_{k\neq j}(\lambda_j - \lambda_k)$ er forskellig fra 0. Heraf ses umiddelbart, at polynomiet,

$$q(z) = \frac{f(\lambda_1)}{p_1(\lambda_1)} p_1(z) + \cdots + \frac{f(\lambda_n)}{p_n(\lambda_n)} p_n(z),$$

vil tilfredsstille de n ligninger (3.7.2). Specielt, med $f(z) = z^t$ kan fremstillingen (3.8.1) af A^t umiddelbart opskrives:

$$A^t = \sum\nolimits_{j=1}^{n} p_j(\lambda_j)^{-1} \lambda_j^t \, p_j(A). \tag{3.9.1}$$

(2) Hvis en rod λ i det karakteristiske polynomium har høj multiplicitet, kan det ofte betale sig at skrive polynomiet $q(z)$ som et polynomium i $z - \lambda$, altså på formen,

$$q(z) = \tilde{q}_0 + \tilde{q}_1(z - \lambda) + \cdots + \tilde{q}_{n-1}(z - \lambda)^{n-1}.$$

Herefter er $(d^l q/dz^l)(\lambda)/l! = \tilde{q}_l$.

Antag specielt, at λ er den eneste rod i $p_A(z)$, altså at $p_A(z) = (z - \lambda)^n$. Her kan koefficienterne $\tilde{q}_l$ ovenfor direkte aflæses af de n ligninger i (3.7.2):

$$\tilde{q}_l = (d^l f/dz^l)(\lambda)/l!.$$

Med $f(z) = z^t$ fås $d^l f/dz^l = t(t-1)\cdots(t-l+1)z^{t-l}$, og dermed $\tilde{q}_l = \binom{t}{l}\lambda^{t-l}$. Udtrykket (3.8.1) har altså formen,

$$A^t = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{t}{l} \lambda^{t-l} (A - \lambda I)^l. \tag{3.9.2}$$

(3.10) Bemærkning. Det er svært at sige, hvilken af de to metoder I og II, der er „den bedste“. Betragt fx tilfældet, hvor det karakteristiske polynomium $p_A(z)$ har n forskellige rødder. I Metode I udnyttes, at A specielt er diagonaliserbar: Bestem, for $k = 1, \dots, n$, en egenvektor $\mathbf{v}_k$ svarende til egenværdien λ_k. Da er

$$A(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = (\lambda_1\mathbf{v}_1, \dots, \lambda_n\mathbf{v}_n) = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)D,$$

hvor $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ er diagonalmatricen. For matricen $T = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, med søjlerne $\mathbf{v}_k$, er altså $AT = TD$, og dermed $A = TDT^{-1}$. Øjensynlig er $D^t = \operatorname{diag}(\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t)$. Herefter bestemmes A^t af $A^t = TD^tT^{-1}$. Bestemmelsen af egenvektorerne $\mathbf{v}_k$, og udregningen af TD^tT^{-1}, modsvares af formlen (3.9.1) fra Metode II; bemærk, at i (3.9.1) skal matrixprodukterne $p_j(A) = \prod_{k\neq j}(A - \lambda_k I)$ udregnes.

Den anden yderlighed er tilfældet, hvor det karakteristiske polynomium kun har én rod: $p_A(z) = (z-\lambda)^n$. Her er $(A-\lambda I)^n = 0$ (Cayley-Hamilton's Sætning), så $A = \lambda I + N$, hvor $N := A - \lambda I$ er nilpotent. Metode I er bare binomialformlen anvendt på $A^t = (\lambda I + N)^t$, jfr (3.6.4). Det er den samme formel, der fås ved Metode II, jfr (3.9.2).

(3.11) Skalarligningen med konstante koefficienter. Betragt den lineære differensligning af orden n med konstante koefficienter, altså ligningen for en skalarfølge $x = x(t)$:

$$\tau^n x + a_{n-1}\tau^{n-1}x + \cdots + a_1\tau x + a_0 x = h(t). \tag{3.11.1}$$

Til differensligningen knyttes følgende *karakteristiske polynomium*, af grad n:

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = (z-\lambda_1)^{n_1}\cdots(z-\lambda_r)^{n_r}; \tag{3.11.2}$$

tallene λ_k i faktoriseringen er de komplekse (forskellige) rødder i $p(z)$. Skalarligningen af orden n er ækvivalent med en førsteordens lineær vektorligning $\tau\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)$ med en konstant $n \times n$-matrix A, jfr (3.2.2).

Det karakteristiske polynomium for skalarligningen er lig med det karakteristiske polynomium for matricen A, altså lig med determinanten,

$$\det(zI - A) = \begin{vmatrix} z & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & z + a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Bevis. Ligningen $p(z) = \det(zI - A)$ vises ved induktion efter n; den er triviel for $n = 1$ (ikke også?). For $n > 1$ har matricen $zI - A$ tallene z og a_0 i første søjle, og udvikling af determinanten efter denne søjle giver en ligning,

$$\det(zI - A) = z\det F + (-1)^{n+1}a_0 \det G. \tag{*}$$

Matricen F (komplementet til z på plads $(1, 1)$ i matricen) er en $(n-1) \times (n-1)$-matrix af samme form som $zI - A$, men med tallene $a_1, \dots, a_{n-1}$ i nederste række. Induktivt er altså

$$\det F = z^{n-1} + a_{n-1}z^{n-2} + \cdots + a_2 z + a_1.$$

Matricen G er en nedre trekantsmatrix med tallet -1 overalt i diagonalen. Altså er $\det G = (-1)^{n-1}$. Af (*) og de fundne udtryk for $\det F$ og $\det G$ fås let ligningen $\det(zI - A) = p(z)$, som ønsket. ∎

Skalarligningen kan løses ved at løse den ækvivalente førsteordens vektorligning med konstante koefficienter. Den homogene skalarligning (dvs ligningen med $h(t) = 0$) kan direkte behandles således:

Sætning. *Antag i den homogene ligning* (3.11.1)*, at $a_0 \neq 0$, altså at $\lambda = 0$ ikke er rod i det karakteristiske polynomium. Da udgør de n talfølger $t^l \lambda_k^t$, for $k = 1, \dots, r$ og $l = 0, \dots, n_k - 1$, en basis for rummet af komplekse løsninger til den homogene ligning.*

Bevis. Løsningsmængden, $\mathcal{H}$, til den homogene ligning er et underrum i vektorrummet af alle talfølger. Lad $\mathcal{U}$ være underrummet, i vektorrummet af alle følger, bestående af de følger, der udspændes af (dvs kan skrives som linearkombinationer af) de givne følger. Talfølgerne i $\mathcal{H}$ er netop førstekoordinaterne af de vektorfølger, som løser den tilsvarende førsteordens vektorligning. Af resultatet i (3.6) eller (3.8) fremgår derfor, at vi har følgende inklusion:

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{U}.$$

Venstresiden $\mathcal{H}$ har dimension n; det følger af (2.2) eller (alternativt) af isomorfien mellem $\mathcal{H}$ og løsningsrummet til den homogene vektorligning. Højresiden $\mathcal{U}$ er frembragt af de n givne følger. Af velkendte resultater fra lineær algebra følger derfor, at der må gælde ligheden $\mathcal{H} = \mathcal{U}$, og at de n givne følger er en basis for $\mathcal{H}$. ∎

Det fremgår af Sætningen, at hver af de n følger $t^l \lambda_k^t$ løser den homogene ligning, men beviset er jo ganske indirekte. Et direkte bevis er følgende:

Venstresiden i (3.11.1) fås ved at anvende operatoren,

$$\tau^n + a_{n-1}\tau^{n-1} + \cdots + a_1\tau + a_0 I = (\tau - \lambda_1 I)^{n_1} \cdots (\tau - \lambda_r I)^{n_r}, \tag{3.11.3}$$

på følgen $x(t)$. Løsningsmængden til den homogene ligning er altså kernen for denne operator. For en følge af formen $x = t^l \mu^t$ med $\mu \neq 0$ får vi:

$$(\tau - \lambda I)x = (t+1)^l \mu^{t+1} - \lambda t^l \mu^t = \big(\mu(t+1)^l - \lambda t^l\big)\,\mu^t\,. \tag{3.11.4}$$

Højresiden har formen $Q(t)\mu^t$ med et polynomium $Q(t)$. Hvis $\mu \neq \lambda$, har $Q(t)$ graden l. Antag, at $\mu = \lambda$. Da er $Q(t) = \lambda\Delta(t^l)$ af grad $l - 1$. Ved addition ses, at hvis $x = P(t)\lambda^t$ med et polynomium $P(t)$ af grad højst l, så er $(\tau - \lambda I)x = \lambda\Delta P(t)\lambda^t$; ved gentagelse fås, at $(\tau - \lambda I)^i x = \lambda^i \Delta^i P(t)\lambda^t$. Specielt, hvis $i > l$, så er $(\tau - \lambda I)^i x = 0$.

Af denne overvejelse ses, at hver af de n anførte følger giver nul ved indsættelse i operatoren (3.11.3). De anførte følger løser altså den homogene ligning.

Af udregningerne fremgår også, hvordan man eksplicit kan løse den inhomogene ligning (3.11.1) for visse højresider $h(t)$. Betragt for eksempel følgen $x(t) = \mu^t$. Af (3.11.4) med $l = 0$ fremgår, at $(\tau - \lambda I)x = (\mu - \lambda)x$. Heraf ses, at indsættelse af følgen $x(t) = \mu^t$ i operatoren (3.11.3) giver følgen $p(\mu)\mu^t$.

Med højresiden $h(t) = \mu^t$ i (3.11.1), hvor μ *ikke* er rod i det karakteristiske polynomium $p(z)$, får vi altså den partikulære løsning $p(\mu)^{-1}\mu^t$. Hvis μ er en karakteristisk rod, $\mu = \lambda_k$, er det ikke svært ved hjælp af udregningerne at bestemme en konstant c således, at følgen $ct^{n_k}\mu^t$ er en partikulær løsning til (3.11.1), stadig med højresiden μ^t.

(3.12) Reelle løsninger. Antag i (3.11.1), at koefficienterne a_i er reelle. I dette tilfælde er man naturligvis oftest interesseret i rummet af reelle løsninger til ligningen. Hvis rødderne λ_k i det karakteristiske polynomium $p(z)$ alle er reelle, bliver følgerne $t^l\,\lambda_k^t$ reelle, og de udgør en reel basis. Hvis en rod λ_k er *imaginær*, dvs ikke reel, så er også det komplekst konjugerede tal $\overline{\lambda}_k$ en rod, med samme multiplicitet n_k. De $2n_k$ følger, $t^l\lambda_k^t$ og $t^l\overline{\lambda}_k^t$ for $l = 0, \dots, n_k - 1$, kan derfor erstattes med deres real- og imaginærdele:

$$t^l\,\mathcal{Re}(\lambda_k^t), \quad t^l\,\mathcal{Im}(\lambda_k^t), \qquad \text{for } l = 0, \dots, n_k - 1. \tag{3.12.1}$$

Herved fremkommer en basis for rummet af reelle løsninger. Hvis $\lambda_k = \rho_k e^{i\theta_k}$, hvor $\rho_k > 0$ og θ_k er reelle tal, får følgerne i (3.12.1) udseendet:

$$t^l\,\rho_k^t \cos\theta_k t, \quad t^l\,\rho_k^t \sin\theta_k t.$$

Bemærk, at for den lineære førsteordens vektorligning $\tau\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ udgør søjlerne i matricen A^t en basis for løsningsrummet. Antag, at matricen A er reel. Da består denne basis automatisk af reelle følger, og de udgør en basis for de reelle løsninger. Begge metoder I og II fører altså til reelle følger, på trods af at der kan indgå imaginære egenværdier λ_k. For Metode II er det i øvrigt klart, at følgerne $q_j(t)$ i fremstillingen (3.8.1) må være reelle talfølger: for hver ligning, der indgår i systemet (3.7.2) med imaginære koefficienter og en imaginær højreside, indgår også den konjugerede ligning i systemet.

(3.13) Eksempel. Betragt den homogene andenordens skalarligning:

$$\tau^2 x + x = 0.$$

Det karakteristiske polynomium er $p(z) = z^2 + 1$, med rødderne $\pm i$. Matricen for den tilhørende vektorligning er $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, jfr (3.2.2). Ligningerne (3.7.2), med $f(z) = z^t$ er $q_0 + q_1 i = i^t$ og $q_0 + q_1(-i) = (-i)^t$, med løsningerne $q_0 = \cos t\pi/2$ og $q_1 = \sin t\pi/2$. Altså er

$$A^t = (\cos t\pi/2)I + (\sin t\pi/2)A = \begin{pmatrix} \cos t\pi/2 & \sin t\pi/2 \\ -\sin t\pi/2 & \cos t\pi/2 \end{pmatrix}.$$

Førstekoordinaterne i matricens søjler, altså følgerne $\cos t\pi/2$ og $\sin t\pi/2$, er en basis for løsningerne til den homogene skalarligning. Bemærk, at de to følger, på trods af det „trigonometriske“ udseende, er ret simple, med periode 4:

$$\begin{aligned} \cos t\pi/2: &\quad 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots \\ \sin t\pi/2: &\quad 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots . \end{aligned}$$

(3.14) Bemærkning. I (3.2) „reduceredes“ den lineære skalarligning af orden n til en lineær vektorligning af orden 1. Omvendt kan en lineær førsteordens vektorligning reduceres til en skalarligning. Betragt for simpelheds skyld en vektorligning med konstante koefficienter i tilfældet $n = 2$, altså en vektorligning af formen,

$$\tau x = ax + by + h(t), \qquad \tau y = cx + dy + k(t). \tag{3.14.1}$$

Vi kan antage, at $b \neq 0$. Isoler så by i den første ligning, og anvend τ. Det giver ligningerne,

$$by = \tau x - ax - h(t), \qquad b\tau y = \tau^2 x - a\tau x - \tau h(t).$$

Nu kan y elimineres: Multiplicer den anden ligning i (3.14.1) med b, og indsæt de fundne udtryk for by og $b\tau y$. Resultatet er en andenordens skalarligning i x.

4. Stabilitet af differensligninger.

(4.1) Stabilitet af lineære ligninger. Den lineære vektordifferensligning i n dimensioner,

$$\tau\mathbf{x} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{h}(t), \tag{4.1.1}$$

hvor $A(t)$ er en $n \times n$-matrix og $\mathbf{h}(t)$ er en søjle i det n-dimensionale talrum V, kaldes (globalt) *asymptotisk stabil*, hvis der for vilkårlige to løsninger $\mathbf{x}_1(t)$ og $\mathbf{x}_2(t)$ til ligningen gælder, at differensen $\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)$ går mod $\mathbf{0}$ for $t \to \infty$. Sagt lidt løst sikrer stabiliteten, at alle løsninger opfører sig ens for $t \to \infty$. Specielt, hvis én løsning har en grænseværdi (for $t \to \infty$), så er alle løsninger konvergente med samme grænseværdi. Da forskellige løsninger til ligningen svarer til de forskellige valg af begyndelsesbetingelse $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, kan betingelsen (lidt løst) udtrykkes sådan: Opførslen af løsningen $\mathbf{x}(t)$ for $t \to \infty$ afhænger ikke af begyndelsesbetingelsen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Differenser $\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)$ mellem løsninger til den inhomogene ligning (4.1.1) er netop løsningerne til den homogene ligning $\tau\mathbf{x} = A(t)\mathbf{x}$. Den inhomogene ligning (4.1.1) er altså asymptotisk stabil, hvis og kun hvis der for enhver løsning $\mathbf{x}(t)$ til den homogene ligning $\tau\mathbf{x} = A(t)\mathbf{x}$ gælder, at $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ for $t \to \infty$.

(4.2) Sætning. *For en konstant $n \times n$-matrix A er følgende fire betingelser er ækvivalente:*

(i) *Differensligningen $\tau\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)$ er asymptotisk stabil.*
(ii) *For alle løsninger $\mathbf{x}(t)$ til den homogene ligning gælder, at $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ for $t \to \infty$.*
(iii) *For $t \to \infty$ gælder $A^t \to 0$.*
(iv) *For alle egenværdier λ_k for A er $|\lambda_k| < 1$.*

Betingelserne er opfyldt, hvis der for alle $i = 1, \dots, n$ gælder uligheden $\sum_j |a_{ij}| < 1$.

Bevis. Ækvivalensen (i) $\Leftrightarrow$ (ii) blev bemærket i (4.1). Videre er søjlerne i matricen A^t løsninger til den homogene ligning; derfor gælder (ii) $\Rightarrow$ (iii). Da søjlerne endda er en basis for rummet af løsninger til den homogene ligning, gælder det omvendte: (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Implikationen (iv) $\Rightarrow$ (iii) følger af de eksplicite udtryk, fra (3.6) eller (3.8), for A^t: hvis $|\lambda| < 1$, vil $t^l\lambda^t \to 0$ for $t \to \infty$. (Tilfældet, hvor $\lambda = 0$ er egenværdi kræver en triviel særbehandling.)

For endelig at vise den manglende implikation (iii) $\Rightarrow$ (iv) betragtes en egenværdi λ for A. Vælg en tilhørende egenvektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Af $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ fås $A^t\mathbf{v} = \lambda^t\mathbf{v}$. Af antagelsen (iii) følger, for $t \to \infty$, at $A^t\mathbf{v} \to \mathbf{0}$, og altså at $\lambda^t\mathbf{v} \to \mathbf{0}$. Da $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, følger det, at $|\lambda| < 1$.

Hermed er ækvivalensen af de fire betingelser bevist.

Antag nu, at $\sum_j |a_{ij}| < 1$ for alle i. Lad λ være en egenværdi for A, og $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ en tilsvarende egenvektor. Vælg m således, at $|v_m| = \max_j |v_j|$. For alle i er

$$|\lambda v_i| = |(A\mathbf{v})_i| = \Big|\sum\nolimits_j a_{ij}v_j\Big| \leqslant \sum\nolimits_j |a_{ij}v_j| \leqslant |v_m| \sum\nolimits_j |a_{ij}| < |v_m|,$$

hvor den sidste ulighed er skarp, fordi $|v_m| \neq 0$. Med $i := m$ aflæses specielt, at $|\lambda| < 1$. □

Øjensynlig gælder, at $A^t \to 0$, hvis og kun hvis $(A^{\mathrm{tr}})^t \to 0$. Den tilstrækkelige betingelse i Sætningen kan derfor erstattes med en tilsvarende betingelse på søjlerne: For alle j gælder uligheden $\sum_i |a_{ij}| < 1$.

(4.3) Bemærkning. Antag, at A opfylder betingelserne i Sætningen, og betragt den inhomogene ligning med en konstant højreside:

$$\tau\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{h}. \tag{4.3.1}$$

Ligningen har én konstant løsning, nemlig den konstante følge

$$\mathbf{x}^* := (I - A)^{-1}\mathbf{h}. \tag{4.3.2}$$

En konstant følge $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ løser nemlig differensligningen, hvis og kun hvis $\mathbf{x}^* = A\mathbf{x}^* + \mathbf{h}$, dvs hvis og kun hvis $(I - A)\mathbf{x}^* = \mathbf{h}$. Af antagelsen om A følger specielt, at $\lambda = 1$ ikke er egenværdi. Derfor er matricen $I - A$ invertibel. Og så følger (4.3.2) af $(I - A)\mathbf{x}^* = \mathbf{h}$.

Vektoren $\mathbf{x}^*$ bestemt i (4.3.2) kaldes *ligevægtsvektoren* eller den *stabile tilstand*. Af (4.2) følger: Enhver løsning $\mathbf{x}(t)$ til (4.3.1) konvergerer, for $t \to \infty$, mod ligevægtsvektoren $\mathbf{x}^*$.

Denne påstand følger også direkte af løsningsformlen i (3.5.3):

$$\mathbf{x}(t) = A^t\mathbf{x}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} A^s\mathbf{h} = A^t\mathbf{x}_0 + (I - A^t)(I - A)^{-1}\mathbf{h}.$$

Da $A^t \to 0$, følger det af formlen, at $\mathbf{x}(t) \to (I - A)^{-1}\mathbf{h}$, som påstået.

(4.4) Definition. Den generelle lineære *skalarligning* (2.2.1) af orden n kaldes tilsvarende (globalt) asymptotisk *stabil*, hvis der for enhver løsning $x(t)$ til den homogene ligning gælder, at $x(t) \to 0$. Øjensynlig gælder $x(t) \to 0$, hvis og kun hvis $\tau x(t) \to 0$. Heraf følger, at skalarligningen er asymptotisk stabil, hvis og kun hvis den tilhørende førsteordens vektorligning, af formen $\tau\mathbf{x} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)$, er asymptotisk stabil.

Hvis skalarligningen har *konstante* koefficienter, bliver den tilhørende matrix A konstant, og asymptotisk stabilitet afgøres af Sætning (4.2): Det indtræffer, hvis og kun hvis alle rødder i det karakteristiske polynomium har numerisk værdi mindre end 1.

Det har således betydning (for polynomier af en given grad n) at kende betingelser på koefficienterne, som sikrer at alle rødderne har numerisk værdi mindre end 1. Her vil vi betragte tilfældene $n = 1$ og $n = 2$, for *reelle* ligninger.

Tilfældet $n = 1$ er naturligvis trivielt: *Skalarligningen af første orden, $\tau x + bx = h(t)$, er asymptotisk stabil, hvis og kun hvis $|b| < 1$.* Er betingelsen opfyldt, og er højresiden $h(t) = h^*$ en konstant følge, så er ligevægtsfølgen x^* den konstante følge bestemt af $x^* + bx^* = h^*$, altså ved $x^* = h^*/(1 + b)$.

For $n = 2$ gælder: *Skalarligningen af orden 2, med $b, c \in \mathbb{R}$,*

$$\tau^2 x + b\tau x + cx = h(t), \tag{4.4.1}$$

er asymptotisk stabil, hvis og kun hvis følgende uligheder er opfyldt:

$$(1) \quad c < 1, \qquad (2) \quad |b| < c + 1.$$

Er betingelsen opfyldt, og er højresiden i (4.4.1) *en konstant følge* $h(t) = h^*$, *så er ligevægtsfølgen den konstante følge* $x^* = (1 + b + c)^{-1} h^*$.

Bevis. Det tilhørende karakteristiske polynomium $z^2 + bz + c$ har rødderne $(-b \pm \sqrt{D})/2$, hvor $D = b^2 - 4c$ er diskriminanten. Bemærk nu først, at uligheden (2), efter multiplikation med 4 og addition af b^2 til begge sider, kan omformes til den ækvivalente ulighed:

$$(2') \quad D < (2 - |b|)^2.$$

Bemærk dernæst, at den største af de numeriske værdier af rødderne er større end $|b|/2$. Er begge de numeriske værdier mindre end 1, følger det, at $|b|/2 < 1$. Af (1) og (2) følger ligeledes, at $|b|/2 < 1$. I resten af beviset kan det derfor antages, at $|b| < 2$.

Antag nu først, at $D < 0$. Det følger af omformningen, at (2) altid er opfyldt. Yderligere gælder, da $D < 0$, at de to rødder har samme numeriske værdi, nemlig $\sqrt{c}$. Begge de to numeriske værdier er altså mindre end 1, hvis og kun hvis (1) er opfyldt.

Antag dernæst, at $D > 0$. Da er $4c < b^2$, og da vi også har antaget, at $|b| < 2$, følger det, at $c < 1$. Altså er (1) altid opfyldt. Den største af de to numeriske værdier af rødderne er $(|b| + \sqrt{D})/2$. Værdien er mindre end 1, hvis og kun hvis $\sqrt{D} < 2 - |b|$, dvs hvis og kun hvis (2) er opfyldt.

Påstanden om ligevægtsfølgen er triviel, idet $1 + b + c > 0$ ifølge (2). ▯

(4.5) Definition. For visse ikke-lineære differensligninger kan man håbe på såkaldt lokal asymptotisk stabilitet. Vi betragter den autonome vektordifferensligning i n dimensioner,

$$\tau \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Ved en *ligevægtsløsning* forstås en konstant følge $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$, som løser ligningen, altså en vektor $\mathbf{x}^*$ således, at $\mathbf{x}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$.

Ligevægtsløsningen $\mathbf{x}^*$ kaldes *lokalt asymptotisk stabil*, hvis enhver løsning $\mathbf{x}(t)$ med begyndelsesværdi $\mathbf{x}(0)$ tilstrækkelig tæt ved $\mathbf{x}^*$ konvergerer mod $\mathbf{x}^*$ for $t \to \infty$. Mere præcist er kravet, at der findes et $\delta > 0$ således, at der for enhver løsning $\mathbf{x}(t)$ med $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*| < \delta$ gælder, at $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}^*$ for $t \to \infty$.

(4.6) Sætning. *Betragt en autonom differensligning* $\tau \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, *og en ligevægtsløsning* $\mathbf{x}^*$, *hvor altså* $\mathbf{x}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$. *Antag, at* $\mathbf{f}$ *er differentiabel i* $\mathbf{x}^*$, *og at alle egenværdier for Jacobimatricen* $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$ *er numerisk mindre end* 1. *Da er løsningen* $\mathbf{x}^*$ *lokalt asymptotisk stabil.*

Bevis. Ved at erstatte afbildningen $\mathbf{f}$ med $\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{x}^*)-\mathbf{x}^*$ reduceres let til tilfældet, hvor $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Antag altså, at $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ og at $\mathbf{f}$ er differentiabel i $\mathbf{0}$ med funktionalmatricen $A := \mathbf{Df}(\mathbf{0})$, altså at der findes en fremstilling,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \varepsilon(\mathbf{x})|\mathbf{x}|, \quad \text{hvor } \varepsilon(\mathbf{x}) \to \mathbf{0} \text{ for } \mathbf{x} \to \mathbf{0},$$

og at alle egenværdier for A er numerisk mindre end 1. Det skal vises for løsninger $\mathbf{x}(t)$, at hvis $|\mathbf{x}(0)|$ er tilstrækkelig lille, så vil $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ for $t \to \infty$.

Følgende ulighed er opfyldt (for alle $\mathbf{x}$), hvis koefficienterne i A er tilstrækkeligt små:

$$|A\mathbf{x}| \leqslant \tfrac{1}{2}|\mathbf{x}|. \tag{4.6.1}$$

Antag nemlig, at alle rækker i A har euklidisk norm mindre end $\frac{1}{2}/\sqrt{n}$. I søjlen $A\mathbf{x}$ står på den i'te plads produktet af den i'te række i A og søjlen $\mathbf{x}$; antagelsen (og Cauchy–Schwartz) giver, at $|(A\mathbf{x})_i| \leqslant \frac{1}{2}|\mathbf{x}|/\sqrt{n}$, og så følger den påståede ulighed.

Betragt først tilfældet, hvor (4.6.1) er opfyldt. Vælg en konstant K med $\frac{1}{2} < K < 1$. Vi har $K - \frac{1}{2} > 0$, og hertil svarer et δ således, at $|\varepsilon(\mathbf{u})| < K - \frac{1}{2}$, når $|\mathbf{u}| < \delta$. For $|\mathbf{u}| < \delta$ får vi altså

$$|\mathbf{f}(\mathbf{u})| \leqslant |A\mathbf{u}| + |\varepsilon(\mathbf{u})|\,|\mathbf{u}| \leqslant \tfrac{1}{2}|\mathbf{u}| + (K - \tfrac{1}{2})|\mathbf{u}| = K|\mathbf{u}|.$$

Da $K < 1$ følger specielt, at $|\mathbf{f}(\mathbf{u})| < \delta$. For en løsning med $|\mathbf{x}(0)| < \delta$ udledes ved induktion efter t, at $|\mathbf{x}(t)| \leqslant K^t|\mathbf{x}(0)|$; specielt konvergerer $\mathbf{x}(t)$ mod $\mathbf{0}$.

Betragt det almindelige tilfælde. Af (4.2) følger, at $A^t \to 0$. Specielt følger det, at der findes en eksponent m således, at vurderingen (4.6.1) gælder for matricen A^m. Øjensynlig gælder for hver løsning $\mathbf{x}(t)$ til ligningen $\tau\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ og hvert j, at delfølgen $\mathbf{x}(j + tm)$, altså $\mathbf{x}(j), \mathbf{x}(j + m), \mathbf{x}(j + 2m), \mathbf{x}(j + 3m), \dots$, er en løsning til differensligningen,

$$\tau\mathbf{x} = \mathbf{f}^m(\mathbf{x}), \tag{4.6.2}$$

hvor $\mathbf{f}^m$ er afbildningen $\mathbf{f}$ sammensat m gange med sig selv. Den sammensatte afbildning har funktionalmatricen A^m. Altså gælder påstanden for ligningen (4.6.2). Det er derfor nok at bemærke, at hvis $|\mathbf{x}_0|$ vælges tilstrækkeligt lille, så vil de første m værdier $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}_{m-1} := \mathbf{x}(m-1)$ være små. Altså gælder, for $j = 0, \dots, m-1$, at $\mathbf{x}(j + mt) \to \mathbf{0}$. Derfor konvergerer $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$. □

(4.7) Anvendelse på skalarligningen. For den autonome skalarligning af orden n,

$$\tau^n x = f(x, \tau x, \dots, \tau^{n-1}x), \tag{4.7.1}$$

bestemt ved en funktion $f(v_0, \dots, v_{n-1})$ af n variable, er den tilhørende vektorligning $\tau\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ beskrevet i (3.2). Den tilsvarende Jacobi-matrix, i et givet punkt $(v_0, \dots, v_{n-1})$, er

$$\mathbf{Df} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v_0} & \frac{\partial f}{\partial v_1} & \frac{\partial f}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial v_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium er, i følge udregningen i (3.11),

$$z^n - \frac{\partial f}{\partial v_{n-1}} z^{n-1} - \dots - \frac{\partial f}{\partial v_0}. \tag{4.7.2}$$

En *ligevægtsværdi* for skalarligningen, dvs en konstant følge $x(t) = x^*$ som løser ligningen, svarer til en ligevægtsløsning til vektorligningen, nødvendigvis af formen $\mathbf{x}^* = (x^*, \dots, x^*)^{\mathrm{tr}}$. Af Sætning (4.6) følger, at en ligevægtsværdi x^* for skalarligningen (4.7.1) er lokalt asymptotisk stabil, hvis polynomiet (4.7.2), hvor de partielle afledede er taget i punktet $(x^*, \dots, x^*)$, opfylder, at alle rødder er numerisk mindre end 1.

For en førsteordens skalarligning $\tau x = f(x)$ er en ligevægtsværdi x^* (dvs $x^* = f(x^*)$) altså lokalt asymptotisk stabil, hvis $|f'(x^*)| < 1$. For en andenordens ligning $\tau^2 x = f(x, \tau x)$, bestemt ved en differentiabel funktion $f(x, y)$, er en ligevægtsværdi x^* (dvs $x^* = f(x^*, x^*)$) asymptotisk stabil, hvis følgende to uligheder er opfyldt i punktet (x^*, x^*):

$$(1) \quad -\partial f/\partial x < 1, \qquad (2) \quad |\partial f/\partial y| < 1 - \partial f/\partial x.$$

A. Appendix: Jordan's normalform.

(A.1) Jordan's Sætning. *Lad $T: V \to V$ være en lineær afbildning af et n-dimensionalt komplekst vektorrum V ind i sig selv. Da findes en basis for V, hvori T beskrives ved en blokmatrix,*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}, \tag{A.1.1}$$

hvor blokkene A_l ned langs diagonalen er kvadratiske matricer af formen,

$$(\lambda), \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \tag{A.1.2}$$

dvs med et fast tal λ i diagonalen, med 1 i skrålinien lige over diagonalen, og med 0 på alle andre pladser. De øvrige blokke i (A.1.1) *er* (*rektangulære*) *nul-matricer af varierende størrelse.*

(A.2) Bemærkning. Matricer af den beskrevne form, dvs af formen (A.1.1) med matricer A_l af formen i (A.1.2), siges at være på *Jordan's normalform.*

En lineær afbildning $T: V \to V$, af et vektorrum *ind i sig selv*, kaldes også en *endomorfi.* Det kan specielt være endomorfien $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ givet ved $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ med en (kompleks) $n \times n$-matrix A. Matricerne, der beskriver denne endomorfi, er matricerne af formen $S^{-1}AS$, med en invertibel matrix S, altså de matricer, der er *similære* med A. Det fremgår altså af Sætningen, at enhver kvadratisk matrix er similær med en matrix af Jordan's normalform.

Tallene λ, der forekommer i matricerne A_l, må være de komplekse egenværdier for T, altså de komplekse rødder i det karakteristiske polynomium $p_T(z)$. Mere præcist kan det karakteristiske polynomium $p_T(z)$ bestemmes som det karakteristiske polynomium $p_A(z) = \det(zI - A)$ for en vilkårlig matrix A, der beskriver T mht en eller anden basis for V. Vi kan specielt som A bruge matricen i (A.1.1), og heraf ses, at

$$p_T(z) = p_{A_1}(z) \cdots p_{A_s}(z).$$

Når A_l er en $m_l \times m_l$-matrix af formen i (A.1.2), er det umiddelbart at bestemme det karakteristiske polynomium:

$$p_{A_l}(z) = (z - \lambda)^{m_l}.$$

Det karakteristiske polynomium kan altså direkte aflæses af Jordan's normalform.

Det skal understreges, at en bestemt matrix af formen i (A.1.2) godt kan forekomme flere gange blandt blokkene A_l. Man kan vise, at Jordan's normalform er entydig i den forstand, at antallet af gange en bestemt matrix forekommer blandt blokkene A_l er uafhængigt af valg af basis.

(A.3) Observation. En væsentlig del af beviset for Sætningen er simpelthen at forstå indholdet i udsagnet. Måske vi først bør minde om, at den lineære afbildning T i (eller mht) *en given basis* $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ for V *beskrives* ved en $n \times n$-matrix A: den j'te søjle i A er koordinatsættet for $T(\mathbf{e}_j)$ med hensyn til den givne basis.

Efter denne påmindelse spørger vi først, hvad det betyder om en basis, at den tilhørende matrix A har blokformen i (A.1.1). Betragt den l'te blok A_l, lad os sige med søjlenumre j, hvor $j' \leqslant j \leqslant j''$. At matricen A_l befinder sig langs diagonalen, betyder, at også rækkerne i A_l har numre i med $j' \leqslant i \leqslant j''$. Dette gælder altså for matricen A, hvis og kun hvis den j'te søjle i A, for $j' \leqslant j \leqslant j''$ har koordinat 0 på nær på pladser med numre i med $j' \leqslant i \leqslant j''$. Med andre ord er kravet til basen: når $T(\mathbf{e}_j)$, for $j' \leqslant j \leqslant j''$, skrives som linearkombination af basisvektorerne $\mathbf{e}_i$, så er der kun koefficienter forskellige fra 0 på vektorerne $\mathbf{e}_i$ for $j' \leqslant i \leqslant j''$; ækvivalent er kravet, at vektoren $T(\mathbf{e}_j)$ er en linearkombination af vektorerne $\mathbf{e}_i$ for $j' \leqslant i \leqslant j''$.

Lad W være underrummet af V frembragt af basisvektorerne $\mathbf{e}_i$ for $j' \leqslant i \leqslant j''$. Kravet er da, for $j' \leqslant j \leqslant j''$, at $T(\mathbf{e}_j) \in W$. Det er øjensynlig opfyldt, hvis og kun hvis der for hver vektor $\mathbf{w} \in W$ gælder $T(\mathbf{w}) \in W$, altså hvis og kun hvis følgende er opfyldt:

$$\mathbf{w} \in W \implies T(\mathbf{w}) \in W.$$

Et underrum $W \subseteq V$ med denne egenskab kaldes (som bekendt) et T-*invariant* underrum.

Det fremgår heraf, at *matricen for T, med hensyn til en given basis $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, har blokformen* (A.1.1), *med $m_l \times m_l$-matricer A_l, hvis og kun hvis basisvektorerne kan grupperes i s grupper, med de første m_1 vektorer i den første gruppe, de næste m_2 vektorer i den anden gruppe, og så videre, og således, at underrummet V_l frembragt af vektorerne i den l'te gruppe er et T-invariant underrum.*

(A.4) Observation. Antag, at der er givet en basis $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ for V, og naturlige tal $m_1, \dots, m_s$ med $n = m_1 + \dots + m_s$. Betragt som i (A.3) den tilsvarende gruppering af basisvektorerne, med de første m_1 vektorer i den første gruppe, de næste m_2 vektorer i den anden gruppe, osv. Lad V_l være underrummet frembragt af basisvektorerne i den l'te gruppe.

Da er V den *direkte sum*,

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s, \tag{A.4.1}$$

hvilket vil sige at følgende betingelse er opfyldt: (*) *Hver vektor $\mathbf{v} \in V$ har en entydig fremstilling,*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_s, \qquad \text{med } \mathbf{v}_l \in V_l. \tag{A.4.2}$$

Vektorerne i V_l er nemlig linearkombinationerne af basisvektorerne i den l'te gruppe. Fremstillinger i (A.4.2) svarer altså til fremstillinger af $\mathbf{v}$ som linearkombinationer af alle basisvektorerne, hvor leddene i summen er grupperet (med parenteser) svarende til de enkelte grupper af basisvektorer.

Antag omvendt, at der i V er givet underrum $V_1, \dots, V_s$ således, at V er den direkte sum, $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$, dvs at betingelsen (*) ovenfor er opfyldt. Vælg en basis for V_1, en basis for V_2, osv. Det følger da, næsten tilsvarende, at foreningsmængden af de valgte vektorer er en basis for V.

(A.5) Observation. Heraf ses, at det at bestemme en basis for V, hvori T beskrives ved en blokmatrix af formen i (A.1.1) er ækvivalent med at bestemme en fremstilling af V som en direkte sum af T-invariante underrum,

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s.$$

Når en sådan dekomposition af V er givet, er T helt bestemt ved sin opførsel i hvert af de T-invariante underrum V_l; studiet af V er „reduceret" til studiet af restriktionerne af T til de enkelte underrum V_l. Det er ikke udelukket, at $s = 1$; så er $V = V_1$, og der er ikke tale om en egentlig reduktion. Den ultimative reduktion er tilfældet, hvor underrummene V_l er 1-dimensionale, og hvor altså $s = n$. Et 1-dimensionalt underrum W, lad os sige $W = \mathrm{Span}(\mathbf{w})$, er T-invariant, hvis og kun hvis $\mathbf{w}$ er en egenvektor for T. Den ultimative reduktion kan altså opnås, hvis og kun hvis V har en basis bestående af egenvektorer for T; dette svarer til at matricen (A.1.1) er en diagonalmatrix.

(A.6) Observation. Af de foregående observationer ses, at Jordan's Sætning kan formuleres sådan:

Der findes en dekomposition af V som en direkte sum, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$, af T-invariante underrum V_l således, at T i underrummet V_l, efter passende valg af basis for V_l, beskrives ved en matrix af den simple form i (A.1.2).

(A.7) Definition. Som vi skal se i det følgende, indgår nilpotente matricer og endomorfier naturligt i forbindelse med Jordan's normalform. Endomorfien T kaldes *nilpotent*, hvis den lineære afbildning T^m, opnået ved at sammensætte T med sig selv m gange, er nulafbildningen, når eksponenten m er passende (stor). Tilsvarende kaldes den kvadratiske matrix A *nilpotent*, hvis $A^m = 0$, når m er tilstrækkelig stor.

Lemma. *En $n \times n$-matrix A er nilpotent, hvis og kun hvis $p_A(z) = z^n$.*

Bevis. Ifølge Cayley–Hamilton's sætning er A rod i sit karakteristiske polynomium $p_A(z)$. Af $p_A(z) = z^n$ følger derfor, at $A^n = 0$; specielt er A nilpotent. Antag omvendt, at A er nilpotent: $A^m = 0$. Hvis λ er en egenværdi: $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ med $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, så får vi $A^2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$, $A^3\mathbf{v} = \lambda^3\mathbf{v}$, osv. Specielt fås $\mathbf{0} = \lambda^m\mathbf{v}$. Da $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, følger det, at $\lambda = 0$. Med andre ord er $\lambda = 0$ den eneste egenværdi for A. Derfor er $\lambda = 0$ den eneste rod i $p_A(z)$. Altså er $p_A(z) = z^n$. □

(A.8) Første reduktion. For at bevise Jordan's Sætning betragtes først dekompositionen i [A&B, side 117]: Svarende til faktoriseringen af det karakteristiske polynomium $p_T(z)$ for T,

$$p_T(z) = (z - \lambda_1)^{n_1} \cdots (z - \lambda_r)^{n_r},$$

hvor tallene λ_k er egenværdierne for T og eksponenterne n_k er deres multipliciteter som rødder i $p_T(z)$, har vi

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r, \qquad \text{hvor } W_k := \mathrm{Ker}\big((T - \lambda_k I)^{n_k}\big).$$

Underrummet W_k er T-invariant. Hvis T_k betegner restriktionen af T til W_k (og I_k betegner identiteten på W_k), så følger det af definitionen af W_k som en kerne, at $(T_k - \lambda_k I_k)^{n_k} = 0$. Med $N_k := T_k - \lambda_k I_k$ har vi altså:

$$T_k = \lambda_k I_k + N_k, \qquad N_k^{n_k} = 0. \tag{A.8.1}$$

For at opnå Jordan's normalform for T er det nok at indse, at den kan opnås for hver af endomorfierne T_k for sig, ved videredekomposition af underrummet W_k. Derfor kan det antages, i beviset for Sætningen, at T er en sum, $T = \lambda I + N$, hvor N er nilpotent.

(A.9) Anden reduktion. Antag, at $T = \lambda I + N$, hvor N er nilpotent. Antag, at Jordan's normalform er opnået for N. Da N er nilpotent, er 0 den eneste egenværdi for N. Det følger af Bemærkning (A.2), at alle blokkene i normalformen for N har 0 i diagonalen. Heraf ses, at normalformen opnås for $T = \lambda I + N$ blot ved at lægge λ til overalt i diagonalen. Derfor er det nok at bevise Sætningen for en *nilpotent* endomorfi T; i dette tilfælde har alle blokkene i (A.1.2) nødvendigvis $\lambda = 0$ i diagonalen.

(A.10) Tredie reduktion. Antag, at T er nilpotent. Den sidste reduktion inden det egentlige bevis består blot i at observere, hvad det betyder, at matricen for T, mht en basis $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ for et T-invariant underrum W, har formen i (A.1.2) med $\lambda = 0$. Det betyder, at basisvektorerne ved T afbildes sådan:

$$\mathbf{0} \leftarrow\!\shortmid \mathbf{e}_1 \leftarrow\!\shortmid \mathbf{e}_2 \leftarrow\!\shortmid \cdots \leftarrow\!\shortmid \mathbf{e}_{m-1} \leftarrow\!\shortmid \mathbf{e}_m. \tag{A.10.1}$$

Specielt skal altså $\mathbf{e}_1$ tilhøre kernen for T.

Det er altså nok at vise følgende påstand:

(A.11) Jordan's normalform for en nilpotent endomorfi. *Antag, at T er nilpotent. Da findes en basis for V således, at når basen grupperes med de første n_1 vektorer i første gruppe, de næste n_2 vektorer i den anden gruppe, osv, så vil betingelsen svarende til* (A.10.1) *være opfyldt for hver af grupperne.*

Bevis. I beviset udnytter vi følgende „opskrift“, der gælder for en vilkårlig lineær afbildning $F\colon V \to U$: Antag, at der er givet en basis $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p$ for billedrummet FV. Vælg vektorer $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \in V$ således, at $\mathbf{u}_i \leftarrow\!\shortmid \mathbf{v}_i$, dvs $\mathbf{u}_i = F\mathbf{v}_i$. Suppler med en basis $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q$ for kernen Ker F. Da udgør vektorerne,

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q,$$

en basis for V.

For at afslutte beviset for Jordan's Sætning skal vi nu vise, for den nilpotente endomorfi T i vektorrummet V, at der findes en basis for V, hvis vektorer kan grupperes:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \mathbf{e}_m, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_q, \dots),$$

således, at betingelsen (A.10.1) er opfyldt for hver af grupperne, dvs at basisvektorerne ved T afbildes sådan:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{0} \leftarrow\!\shortmid \mathbf{e}_1 \leftarrow\!\shortmid \mathbf{e}_2 \leftarrow\!\shortmid \cdots \leftarrow\!\shortmid \mathbf{e}_{m-1} \leftarrow\!\shortmid \mathbf{e}_m,\\
&\mathbf{0} \leftarrow\!\shortmid \mathbf{f}_1 \leftarrow\!\shortmid \mathbf{f}_2 \leftarrow\!\shortmid \cdots \leftarrow\!\shortmid \mathbf{f}_p,\\
&\mathbf{0} \leftarrow\!\shortmid \mathbf{g}_1 \leftarrow\!\shortmid \cdots \leftarrow\!\shortmid \mathbf{g}_{q-1} \leftarrow\!\shortmid \mathbf{g}_q,\\
&\ \vdots
\end{aligned} \tag{A.11.1}$$

Påstanden vises ved fuldstændig induktion efter dimensionen af V. Den er triviel (og indholdsløs), hvis $\dim V = 0$. Derfor antages, at $\dim V > 0$, og at påstanden gælder for nilpotente endomorfier i vektorrum af dimension mindre end $\dim V$.

Betragt specielt billedrummet TV. Da T er nilpotent (og $V \neq 0$), kan T specielt ikke være surjektiv. Altså er $\dim TV < \dim V$. Øjensynlig er $U = TV$ et T-invariant underrum og restriktionen af T til U er nilpotent. Induktivt kan vi derfor antage, at påstanden gælder for TV. Lad den grupperede basis for TV bestå af vektorerne i (A.11.1).

Nu anvendes opskriften. Vi skal først vælge vektorer i V, som ved T afbildes på den givne basis for TV. I hver gruppe er der et oplagt valg på nær for gruppens sidste vektor: Vi har $\mathbf{e}_i \leftarrow\!\shortmid \mathbf{e}_{i+1}$, $\mathbf{f}_j \leftarrow\!\shortmid \mathbf{f}_{j+1}$, osv. For den sidste vektor i hver gruppe vælger vi en ny vektor: $\mathbf{e}_m \leftarrow\!\shortmid \mathbf{e}_{m+1}, \mathbf{f}_p \leftarrow\!\shortmid \mathbf{f}_{p+1}$, osv. Valget er muligt, fordi det var antaget, at vektorerne i (A.11.1) ligger i billedrummet TV.

Dernæst skal vi vælge en basis for $\operatorname{Ker} T$. I kernen har vi allerede de lineært uafhængige vektorer $\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1, \mathbf{g}_1, \ldots$, bestående af den første vektor fra hver gruppe i basen for TV. Dem supplerer vi – om nødvendigt – med vektorer $\mathbf{h}_1, \mathbf{k}_1, \ldots$ til en basis for kernen. Det følger af opskriften, at vi nu har en basis for V. Den består af grupper, nemlig dels grupper bestående af hver af de oprindelige grupper i (A.11.1) suppleret med yderligere én vektor, dels af grupper bestående af én vektor for de vektorer, vi supplerede med i kernen. Det er klart, at hver af grupperne opfylder betingelsen i (A.10.1). Altså har vi opnået den ønskede basis for V. □

O. Opgaver.

1. Løs differensligningen $\tau x = x + t$.

2. Løs differensligningen $(1 + x)\tau x = x$.

3. I forbindelse med differentialligninger er det naturligt at betragte *monomierne* t^l, eller $t^l/l!$, for reelle værdier af t. Begrund, at det i forbindelse med differensligninger er mere naturligt at betragte *binomialkoefficienterne* og/eller de *nedstigende faktorialer*,

$$\binom{t}{l}, \qquad \text{og} \qquad t^{\underline{l}} = t(t-1)\cdots(t-l+1).$$

4. Angiv en differensligning $\tau x = f(x)$, der har følgerne $x_t = (t+K)^{-2}$ som løsninger.

5. Fibonacci's talfølge x_t er følgen $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$. Hvad har den at gøre med differensligninger? Bestem grænseværdien $\lim_{t\to\infty} x_{t+1}/x_t$.

6. Løs differensligningen $\tau x = x + t + t^2$.

7. Løs differensligningen $\tau^2 x = x$.

8. „Nåh, det er jo bare differensligningen $\Delta x = rx - b$", sagde jeg til min bankrådgiver. Hvad snakkede vi om? Og hvad fandt vi frem til?

9. Diskuter den logistiske differensligning $\Delta x = rx(1 - x/K)$, eller udførligt skrevet: $x_{t+1} - x_t = rx_t(1 - x_t/K)$, for $t \to \infty$. [Vink: det er en svær opgave; det er nødvendigt at skelne mellem værdier af r afgrænset af $r = 1$, $r = 2$ og $r = 3$.]

10. Vis, at følgerne $\mathbf{x}_1 = (1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 2, 2{\cdot}2^2, 3{\cdot}2^3, 4{\cdot}2^4, 5{\cdot}2^5, \dots)$, og $\mathbf{x}_3 = (-1, -1, 0, 1{\cdot}2^2, 2{\cdot}2^3, 3{\cdot}2^4, \dots)$, er lineært afhængige følger.

11. (2DMI-eksamen, opgave 2, vinteren 1997/98) *Differensfølgen* for en kompleks talfølge $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ er følgen $\Delta\mathbf{x}$, hvis n'te element er $(\Delta\mathbf{x})_n = x_{n+1} - x_n$ for $n = 0, 1, 2, \dots$, altså

$$\Delta\mathbf{x} = (x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots).$$

(a) Vis for følger $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$, at $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{y}$, hvis og kun hvis der findes en konstant α så

$$x_0 = \alpha, \quad \text{og} \quad x_n = \alpha + \sum_{i=0}^{n-1} y_i, \quad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

(b) Gør rede for, at det n'te element af $\Delta(\Delta\mathbf{x})$ er givet ved

$$(\Delta(\Delta\mathbf{x}))_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n. \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

og find dernæst den fuldstændige løsning til den homogene differensligning

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0, \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

(c) Vis, for $n = 1, 2, 3, \dots$, formlerne

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{og} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i(i-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

(d) Bestem den fuldstændige løsning til den inhomogene differensligning

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = n, \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

12. Find den fuldstændige løsning til differensligningen $\tau^2 x - 2\tau x + x = 2^t(t-1)$.

13. Bestem den fuldstændige løsning til den homogene differensligning $\tau^n x = x$. [Vink: Hvad ville du kalde følger, der tilfredsstiller ligningen?]

14. Betragt følgende 3×3-matricer:

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem den vektorfølge $\mathbf{x}(t)$, som opfylder den homogene differensligning $\tau\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ og $\mathbf{x}(0) = (1, 1, 0)^{\mathrm{tr}}$, hvor A er matricen fra (a).

(b) Bestem den vektorfølge $\mathbf{x}(t)$, som opfylder differensligningen $\tau\mathbf{x} = A\mathbf{x} + (t, 2, t^2)^{\mathrm{tr}}$ (som er inhomogen) og $\mathbf{x}(0) = (1, 1, 0)^{\mathrm{tr}}$, hvor A er matricen fra (b).

(c) Hvilke af ligningerne i (a) og (b) er asymptotisk stabile?

15. Angiv en talfølge, som ikke for noget n kan være løsning til en n'te-ordens homogen differensligning med konstante koefficienter.

16. Hvordan løser man en vektordifferensligning $\tau\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, når matricen A er en øvre trekantsmatrix?

17. Lad der være givet et n-dimensionalt underrum L af vektorrummet af alle talfølger. Antag, at L er τ-invariant, altså at der for alle følger $x \in L$ gælder, at også $\tau x \in L$. Vis, at L er løsningsrummet for en passende n'te-ordens differensligning.

18. Betragt en førsteordens differentialligning $x' = f(t, x)$ med begyndelsesbetingelse $x(0) = x_0$; vi antager, at $f(t, x)$ er defineret for alle (t, x). Numeriske løsningsmetoder erstatter typisk differentialligningen med en differensligning. Hvilken differensligning svarer til Euler's metode [A&B, side 70 ff] med en given skridtlængde h.

19. Vis, at resultaterne i afsnittene (3.6), (3.8) og (3.11) kan udstrækkes til også at dække tilfældet, hvor $\lambda = 0$ er rod i det karakteristiske polynomium (med multiplicitet n_0). I det generelle resultat indgår naturligt følgerne δ_l (for $l = 0, \dots, n_0 - 1$) bestemt ved $\delta_l(l) = 1$ og $\delta_l(t) = 0$ for $t \neq l$.

20. Betragt den inhomogene ligning (3.11.1) med $h(t) = \lambda_k^t$, hvor λ_k er rod i det karakteristiske polynomium (3.11.2). Bestem konstanten c således, at følgen $ct^{n_k}\lambda_k^t$ er en partikulær løsning.

21. Betragt differensligningen $u\tau x = x - h(t)$, hvor u er en konstant med $|u| < 1$ og $h(t)$ er en given begrænset følge. Vis, at differensligningen har præcis én begrænset løsning. [Vink: Den begrænsede løsning har $x(0) = \sum_{t\geqslant 0} h(t)u^t$. At der kun er én begrænset løsning, indses ved at løse den homogene ligning.]

22. Bestem fundamentalmatricen A^t, når A er en af følgende matricer,

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\quad \begin{pmatrix} 0 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

[Vink: matricerne er betragtet i [A&B, side 98–100].]

23. Betragt differensligningssystemet; og matricen,

$$\begin{aligned} \tau x &= \tfrac{3}{5}x + \tfrac{1}{5}y, \\ \tau y &= \tfrac{1}{5}x + \tfrac{3}{5}y; \end{aligned} \qquad \text{og } Q := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Gør rede for, at koefficientmatricen A for systemet er diagonaliserbar.
b) Vis, at med Q defineret ovenfor er $A = QDQ^{-1}$, hvor D er en diagonalmatrix.
c) Løs ligningen $\tau\mathbf{z} = D\mathbf{z}$, og find dernæst løsningen til det først givne system.
d) Gør rede for, at det først givne system er asymptotisk stabilt.

24. (2DMI-eksamen, opgave 2, sommeren 1997) Betragt det lineære homogene differensligningssystem med konstante koefficienter

$$\tau \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{*}$$

(a) Vis, at for enhver løsning til (*) er sumfølgen: $s(t) := x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$, løsning til differensligningen $\tau x = x$.

(b) Vis, at hver af koordinatfølgerne $x_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) i en løsning til (*) er løsning til differensligningen (af 3. orden): $\tau^3 x - x = 0$.

(c) Angiv den fuldstændige løsning til (*), og bestem specielt mængden af reelle løsninger.

(d) Gør rede for, at der til givne $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ findes netop én løsning til (*), hvis koordinater opfylder $x_1(0) = \alpha$, $x_1(1) = \beta$ og $x_1(2) = \gamma$.

25. Differentialligningen $x'' = -x$ har som bekendt nogle vigtige løsninger. Hvad med differensligningen $\Delta^2 x = -x$?

26. Operatornormen, $|A|$, af en $n\times n$-matrix A, defineres som bekendt fra den euklidiske norm $|\mathbf{x}|$ på talrummet af søjler som $\max_{|\mathbf{x}|=1} |A\mathbf{x}|$. Vis, at hvis $|A| < 1$, så er differensligningen $\tau\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ asymptotisk stabil. Vis, at „kun hvis“ er galt.

27. Den homogene lineære vektordifferensligning $\tau\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ kaldes (globalt) *stabil*, hvis enhver løsning $\mathbf{x}(t)$ er begrænset. Følgende påstand er kun næsten rigtig: ligningen er stabil, hvis og kun hvis alle egenværdier for A har numerisk værdi højst lig med 1. Hvad mangler for at gøre påstanden helt rigtig?

28. Løs differensligningen $\tau^2 x + \tau x + x = 0$. Vis, at alle løsninger har periode 3, og angiv de reelle løsninger. Samme spørgsmål for ligningen $\tau^2 x - \tau x + x = 0$.

29. Løs differensligningen $x_{t+1} = 1/(x_t + 1)$, $x_0 = 0$. Hvad sker der med løsningen for $t \to \infty$? Og hvorfor sker det?

30. Løs differensligningen $x_n^2 = x_{n+1}x_{n-1}$. [Vink: prøv med $x_n = e^{y_n}$.]

31. Løs differensligningen,

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \left(\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\right)^{\alpha},$$

hvor α er en reel konstant. Du huskede vel muligheden $\alpha = 1$?

P. Et projekt.

MAE305 Handout #2 February 14, 1994

Difference Equations

We study the difference equation:

$$y_{n+1} = \alpha(y_n - y_n^2) \tag{1}$$

It is easy to see that this equation has two contant solutions (fixpoints). Namely, $y = 0$ and $y = \frac{\alpha-1}{\alpha}$. A linear stability result shows that $y = 0$ is stable for $0 \leqslant \alpha < 1$ and $y = \frac{\alpha-1}{\alpha}$ is stable for $1 < \alpha < 3$.

We now look for periodic solutions of period 2, i.e., solutions such that $y_{n+2} = y_n$. The value y_n must therefore satisfy

$$y_n = y_{n+2} = \alpha(y_{n+1} - y_{n+1}^2) = \alpha(\alpha(y_n - y_n^2) - \alpha^2(y_n - y_n^2)^2). \tag{2}$$

We can write this equation in y_n as

$$\alpha y_n\Big(y_n - \frac{\alpha-1}{\alpha}\Big)\Big(y_n^2 - \frac{\alpha+1}{\alpha}y_n + \frac{\alpha+1}{\alpha^2}\Big) = 0. \tag{3}$$

This equation has as solutions the two fixpoints $y_n = 0$ and $y_n = \frac{\alpha-1}{\alpha}$. It also has two more solutions corresponding to a periodic solution of period 2.

Homework Problem:

(a) Show that (2) is equivalent to (3).

(b) Find expressions for the solutions to (3). Show that if y_n is a solution then y_{n+1} computed from (1) is also a solution.

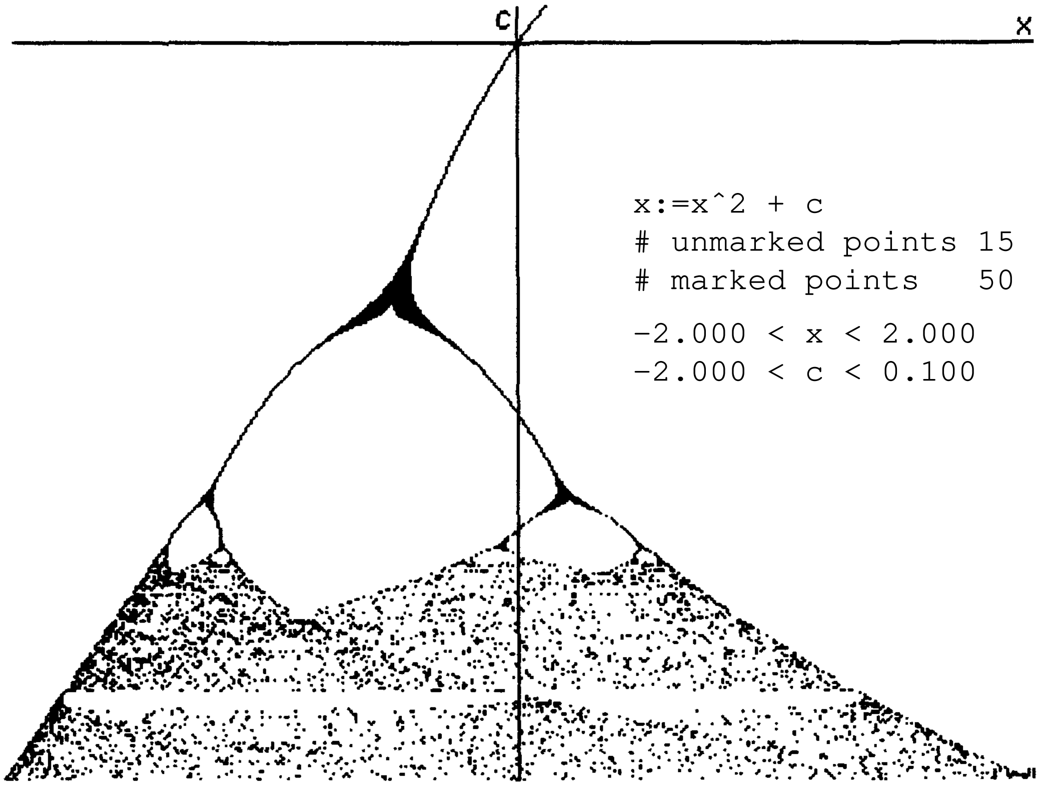
(c) Show that for $\alpha = 3$ three solutions are identical.

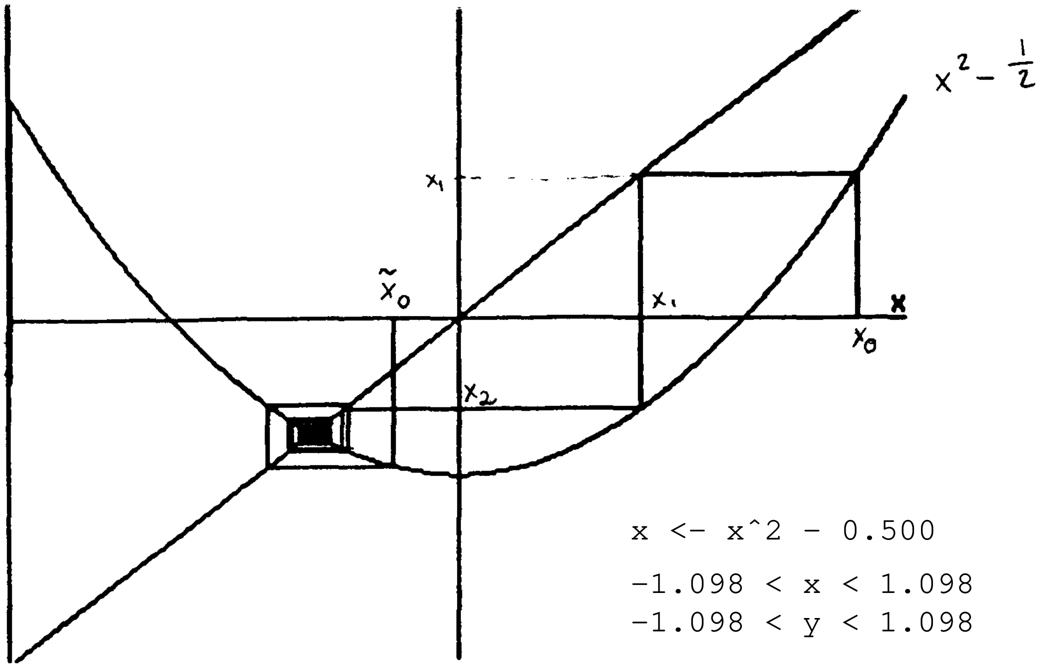
Note that at $\alpha = 1$, where there is an exchange of stability, the to fixpoints are identical. Moreover, at $\alpha = 3$, the next exchange of stability, we get from (c) that the period 2 solution degenerates to a fixpoint. If $\alpha > 3$ (but not much greater) it is the periodic solution which is stable.

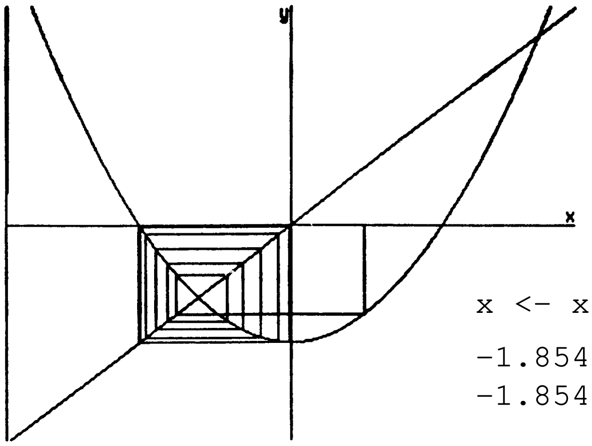
Do the same analysis for the difference equation

$$y_{n+1} = y_n^2 + c \tag{4}$$

for different values of the parameter c. In particular explain the pictures on the next pages.

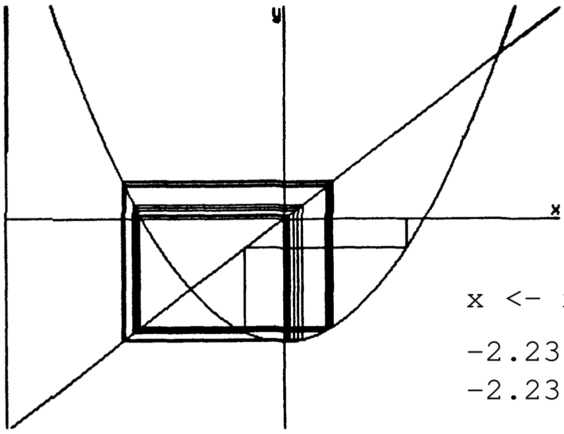

c
x
x:=x^2 + c
unmarked points 15
marked points 50
-2.000 < x < 2.000
-2.000 < c < 0.100


$x^2 - \frac{1}{2}$
x_1
$\tilde{x}_0$
x_1
x
x_0
x_2
x <- x^2 - 0.500
-1.098 < x < 1.098
-1.098 < y < 1.098



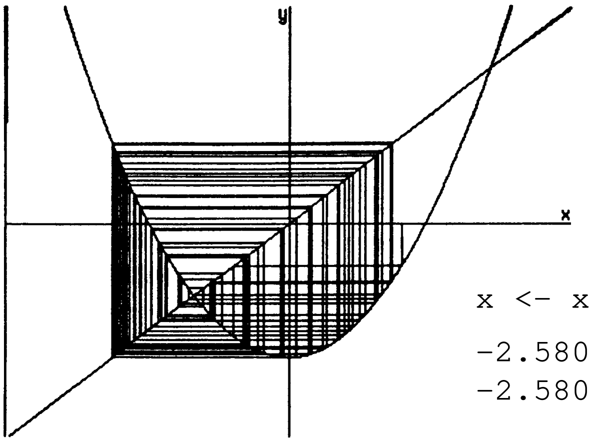
x <- x^2 - 1.000

-1.854 < x < 1.854
-1.854 < y < 1.854



x <- x^2 - 1.300

-2.235 < x < 2.235
-2.235 < y < 2.235



x <- x^2 - 1.600

-2.580 < x < 2.580
-2.580 < y < 2.580

I. Index.

I. Index.