Ugeseddel 7-8.

Program. I 7. og 8. uge er overskrifterne „Cyklisk gruppe“ og „Sideklasser“. Bemærk, at 7. undervisningsuge omfatter påskeferien. Til øvelserne regnes følgende opgaver:

21/3-1/4: GRP3: 1, 2, 3, **6**, 7, 8, 9, 12, 14, 15.

4/4-8/4: GRP2: 4; GRP3: 4, 5, **10**; GRP4: 1, 2, 4, 5; UO: 3, 4*.

I de forgangne to uger gennemgik jeg GRP2, og en del af GRP3.

Flytning af undervisning. I blokkens sidste uge, den niende, flyttes fredagsundervisningen til tirsdag den 12/4, med øvelser kl 9-11 og forelæsninger kl 11-13, i de sædvanlige lokaler. Torsdagsholdet ændres ikke.

Genaflevering af obligatorisk opgave, bliver forhåbentligt ikke aktuelt, men her er alligevel fristerne: Aflevering senest 18/3 kl 12. Tilbagelevering af besvarelser senest ved øvelserne torsdag-fredag 31/3-1/4. Genaflevering senest ved øvelserne torsdag-fredag 7/4-8/4. Anden tilbagelevering af besvarelserne senest ved øvelserne tirsdag-torsdag 12/4-14/4. Herefter eventuel genaflevering direkte til undertegnede senest fredag den 15/4 kl 12. På nogle hold kan man sikkert aftale en hurtigere tilbagelevering af besvarelserne. [Lad os lige understrege igen, at vi taler om et „worst case scenario“.]

Nøgleord: permutation, permutationsgruppe, identiteten, den symmetriske gruppe S_n, tabelnotation og direkte notation, fixpunkt, disjunkte permutationer, p-cykel, cykelnotation, transposition, baner for permutation, cykelfremstilling, Cykelsætning, cykeltype, dobbelttransposition, fortegn, lige og ulige permutation, den alternerende gruppe A_n, undergruppe, trivielle undergrupper, ægte undergruppe, potens af element, potensreglerne, orden af g, cykliske undergruppe $\langle g\rangle$, cyklisk gruppe.

Kommentar. I daglig tale siger vi, at sættet (b, d, c, e, a) er en permutation af sættet (a, b, c, d, e). Men hvilken permutation er der tale om? Og er det overhovedet en permutation, hvis fx $a = b$? I matematisk forstand skal en permutation være en bijektiv afbildning $\sigma : X \to X$ af en mængde på sig selv, så et godt spørgsmål er: hvad er X?

Pointen er, at den permutation i matematisk forstand, der beskriver det første sæt ud fra det sidste, er en permutation af pladserne, og ikke en permutation af de symboler, der står på pladserne. Pladserne er naturligt nummereret 1, 2, 3, 4, 5, og den efterlyste permutation σ er den permutation af pladserne (dvs $\sigma \in \mathrm{S}_5$), som beskriver, at symbolet a er flyttet fra plads nummer 1 til plads nummer 5 (dvs $\sigma(1) = 5$, at symbolet b er flyttet fra plads nummer 2 til plads nummer 1 (dvs $\sigma(2) = 1$), at symbolet c er forblevet på plads nummer 3 (dvs $\sigma(3) = 3$), osv. Når symbolerne er forskellige, er permutationen af pladserne entydig. Er nogle af symbolerne ens, er der flere muligheder. Det er en tilsvarende brug permutationer, der beskriver 15-spillet i GRP(2.25). [Check lige, at du kan besvare det spørgsmål, der står allersidst i GRP(2.25)!]

For et element g i gruppen G betragtes potenserne $e = g^0$, $g = g^1$, g^2, g^3, osv. *Enten* er alle potenserne forskellige. I dette tilfælde har g uendelig orden. *Eller* de er ikke alle forskellige. I dette tilfælde viste vi, at der findes en eksponent $n > 0$ så at $g^n = e$; den mindste sådanne eksponent er ordenen af g.

Potenserne af g (incl dem med negativ eksponent) udgør den cykliske undergruppe $\langle g \rangle$. Hvis g har uendelig orden, har undergruppen $\langle g \rangle$ også uendelig orden. Hvis g har orden n, består $\langle g \rangle$ af de n forskellige potenser $e, g, \dots, g^{n-1}$.

Kuglerne.

• *Cykelsætning. Enhver permutation σ af en endelig mængde X kan (entydigt) skrives som produkt af disjunkte cykler.* Resultatet er fundamentalt for bogens fremstilling af permutationer. Cyklerne hører til *banerne* for σ: Man kan „se“ banerne, når man for hvert x i X tænker sig afsat en pil fra x til $\sigma(x)$. Der går så en pil fra x_1 til $x_2 := \sigma(x_1)$, fra x_2 til $x_3 := \sigma(x_2)$ osv, og banen gennem x_1 består af de elementer man kommer til fra x_1 ved at følge pilene (gør man det, kommer man i øvrigt igen tilbage til x_1). Specielt er en permutation en *cykel*, når man kun kan „se“ præcis én bane, dvs når alle elementer uden for en enkelt bane er fixpunkter.

• *Hovedresultat. Enhver permutation er et produkt af transpositioner.* For en p-cykel har man fx følgende fremstilling med $p-1$ transpositioner:

$$(x_1\ x_2\ \dots\ x_p) = (x_1\ x_p)\cdots(x_1\ x_3)(x_1\ x_2).$$

• *Fortegnet*, $\operatorname{sign}(\sigma)$, er ret teknisk defineret. Men egentlig er det nok at huske, at en p-cykel har fortegnet $(-1)^{p-1}$ (specielt har en transposition fortegnet -1) og at der gælder følgende ligning:

$$\operatorname{sign}(\mu\sigma) = \operatorname{sign}(\mu)\operatorname{sign}(\sigma).$$

Herefter fås inddelingen af permutationer i lige og ulige, og specielt undergruppen A_n af lige permutationer. Halvdelen (når $n \geqslant 2$) af permutationerne er lige.

• *Ordenen* af et element g i en gruppe, af og til betegnet $|g|$, er det første $n = 1, 2, 3, \dots$ for hvilket $g^n = e$; hvis intet sådant n findes, sættes ordenen til ∞. Det er værd at vide, at når g har orden n, så indeholder den cykliske gruppe $\langle g \rangle$, bestående af potenserne af g, præcis n elementer:

$$\langle g \rangle = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}.$$

• *Man skal vide*, hvordan man bestemmer ordenen af en potens g^a af et element g af orden n. Hvis $a\,|\,n$ er det nemt: Betragt potenserne $(g^a)^i = g^{ai}$ for $i = 1, 2, \dots$. For $i < n/a$ er potensen $\neq e$ og for $i = n/a$ er potensen $(g^a)^{n/a} = g^n = e$; derfor er ordenen lig med n/a. Hvis a ikke går op i n er det lidt sværere, men der er en formel: Ordenen er $n/(n, a)$, hvor (n, a) er den største fælles divisor for n, a.

På sigt: I den 9. uge er overskriften „Sideklasser og afrunding“.

Ved øvelserne regnes følgende opgaver:

11/4-15/4: GRP4: 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 17*.

Anders Thorup