Obligatorisk Mat2AL-opgave nr. 1

Besvarelsen afleveres til instruktoren, evt. i instruktorens box, senest fredag den 18/3 kl 12.00.

1. En doven matematiklærer har fået til opgave at tælle skolens elever. Han ved, der er højst 5.000 elever på skolen. Han stiller eleverne i rækker,
først med præcis 11 i hver række, og ser, at der er 6 elever til overs,
så med præcis 13 i hver række, og ser, at der er 4 elever til overs,
så med præcis 15 i hver række, og ser, at der er 2 elever til overs, og
til sidst med præcis 17 i hver række, og ser, at der er 3 elever til overs.
Hvor mange elever er der på skolen?

2. (i) Bestem det sidste ciffer i hver af potenserne 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7 og 3^8. Bestem det sidste ciffer i potensen 3^{2005}.
(ii) Definer en følge $a_1, a_2, a_3, \dots$ af naturlige tal ved forskriften,

$$a_1 = 3 \quad \text{og} \quad a_{n+1} = 3^{a_n}, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Bestem det sidste ciffer i tallet a_{30}.

3. Idet tallene $1, 2, \dots, 20$ identificeres med deres restklasser modulo 20, defineres en permutation σ i S_{20} ved $x \mapsto 7x \pmod{20}$. Bestem cykelfremstillingen af σ.

4. Antag, at X er en ordnet mængde med n elementer (tænk fx på $X = \{0, 1, \dots, n-1\}$). Vis, at enhver permutation σ af X har en entydig fremstilling som et produkt af følgende form (med $r \geqslant 0$ transpositioner):

$$\sigma = (i_1\, j_1) \cdots (i_r\, j_r), \text{ hvor } i_s < j_s \text{ for } s = 1, \dots, r \text{ og } j_1 < \cdots < j_r. \qquad (*)$$

[Vink: For $\sigma = \mathrm{id}$ anvendes den tomme fremstilling ($r = 0$). For $\sigma \neq \mathrm{id}$ kan man lade $j(\sigma)$ betegne det største element, der flyttes af σ. Begrund, at i en fremstilling (*) må der gælde $j(\sigma) = j_r$ og $\sigma(i_r) = j_r$, og benyt dette til at vise påstanden ved fuldstændig induktion efter $j(\sigma)$.]
Vis, at $n-r$ er antallet af baner for σ. [Vink: Denne påstand kan medtages i induktionsbeviset for den første påstand.]

5. For $n \geqslant 0$ kan *Stirling-tallene af første art*, $\left[{n \atop r} \right]$ for $r = 0, \dots, n$, defineres ved ligningen mellem polynomier:

$$x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum\nolimits_r \left[{n \atop r} \right] x^r .$$

Vis, ved at multiplicere parenteserne i produktet, at

$$\left[{n \atop n-r} \right] = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant n-1} j_1 j_2 \cdots j_r .$$

Udled heraf (ved at kombinere med opgave 4), at

$$\left[{n \atop r} \right] = \text{antallet af permutationer i } S_n \text{ med } r \text{ baner.}$$