Matematik 2AL, sommeren 1996

1. Angiv 3 ikke-isomorfe grupper af orden 260.

2. Gør rede for, at diedergruppen D_6 ikke er isomorf med en undergruppe af den symmetriske gruppe S_4.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 24$.

3. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[x]$.

4. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[x]$.

5. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Z}_5[x]$, hvor $\mathbb{Z}_5$ er restklasseringen modulo 5 og koefficienterne i $f(x)$ fortolkes som restklasser i $\mathbb{Z}_5$.

I de næste 5 spørgsmål betragtes den symmetriske gruppe S_6. En permutation kaldes en *dobbelttransposition*, hvis den er et produkt af 2 disjunkte transpositioner. Med σ og τ betegnes følgende to cykler i S_6:

$$\sigma = (2\,3\,4\,5\,6) \qquad \text{og} \qquad \tau = (1\,2\,3).$$

6. Udregn produkterne $\sigma\tau$ og $\tau\sigma$, og angiv ordenerne af disse to permutationer.

7. Vis ved et eksempel, at et produkt af to 3-cykler kan være en dobbelttransposition.

8. Bestem antallet af dobbelttranspositioner i S_6.

9. Gør rede for, at den mindste normale undergruppe af S_6 som indeholder τ er den alternerende gruppe A_6.

10. Bestem antallet af permutationer i S_6 som er konjugerede med σ. Angiv dernæst samtlige permutationer μ i centralisatoren for σ, dvs de permutationer μ i S_6, for hvilke $\mu\sigma = \sigma\mu$.

11. Vis, at en gruppe af orden 260 ikke kan være simpel.

12. Skriv tallet 50 som et produkt af irreducible elementer i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$.

13. Hvor mange forskellige perlekæder med 7 perler kan der laves, når der er tre farver perler at vælge imellem?

I de sidste 2 spørgsmål betragtes polynomierne $f(x) = x^5 + x^3 + 1$ og $g(x) = x^2 + x + 1$ i ringen $\mathbb{Z}_2[x]$.

14. Bestem resten af $f(x)$ ved division med $g(x)$, dvs angiv det polynomium $r(x)$ af grad mindre end 2, som indgår i en fremstilling $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ i $\mathbb{Z}_2[x]$.

15. Polynomiet $g(x)$ er det eneste irreducible andengradspolynomium i $\mathbb{Z}_2[x]$ [Dette kræves ikke bevist]. Vis, at polynomiet $f(x)$ er irreducibelt i $\mathbb{Z}_2[x]$.

Matematik 2AL, vinteren 1996-97

1. Angiv 4 ikke-isomorfe grupper af orden 140.

2. Vis, at diedergruppen D_4 indeholder to ikke-isomorfe undergrupper af orden 4.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f(x) = x^3 + 12x^2 + 18$.

3. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[x]$.

4. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[x]$.

5. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Z}_5[x]$, hvor $\mathbb{Z}_5$ er restklasseringen modulo 5 og koefficienterne i $f(x)$ fortolkes som restklasser i $\mathbb{Z}_5$.

I de næste 5 spørgsmål betragtes den symmetriske gruppe S_7. En permutation kaldes en *dobbelttransposition*, hvis den er et produkt af 2 disjunkte transpositioner. Med σ og τ betegnes følgende to cykler i S_7:

$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6) \qquad \text{og} \qquad \tau = (5\,6\,7).$$

6. Udregn produkterne $\sigma\tau$ og $\tau\sigma$, og angiv ordenerne af disse to permutationer.

7. Vis, at enhver permutation $\mu \neq \text{id}$ i A_7, som opfylder $\mu^2 = \text{id}$, er en dobbelttransposition.

8. Bestem antallet af dobbelttranspositioner i S_7.

9. Hvilke af tallene $1, 2, \ldots, 15$ er ikke orden af et element i S_7?

10. Bestem antallet af permutationer i S_7 som er konjugerede med σ. Angiv dernæst samtlige permutationer μ i centralisatoren for σ, dvs de permutationer μ i S_7, for hvilke $\mu\sigma = \sigma\mu$.

11. Vis, at en gruppe af orden 140 ikke kan være simpel.

12. Hvilke af tallene $1+i$, $1+2i$, $1+3i$, $1+4i$, og $1+5i$ er irreducible i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$. Angiv primopløsninger i $\mathbb{Z}[i]$ for de reducible af tallene.

13. Hvor mange forskellige perlekæder med 6 perler kan der laves, når der er tre farver perler at vælge imellem?

14. Betragt polynomiet $g(x) = x^2 + x + 1$ i ringen $\mathbb{Z}_2[x]$. Vis, at $g(x)$ er et irreducibelt polynomium, og vis, at $g(x)$ er det eneste irreducible polynomium af grad 2.

15. Angiv samtlige irreducible polynomier af grad 4 i $\mathbb{Z}_2[x]$.

Matematik 2AL, sommeren 1997

1. Permutationen σ i S_6 er et produkt af fire 3-cykler,

$$\sigma = (4\,5\,6)(3\,4\,5)(2\,3\,4)(1\,2\,3).$$

Bestem fortegnet for σ. Angiv fremstillingen af σ som produkt af disjunkte cykler.

2. En permutation μ i S_{10} har typen $4^1 6^1$. Hvilken type har μ^3?

3. Vis, at hvis en kommutativ gruppe af orden 120 har præcis ét element af orden 2, så er gruppen cyklisk.

4. For en endelig gruppe G og $n \in \mathbb{N}$ betegnes med $\alpha_n(G)$ antallet af elementer i G, hvis orden er divisor i n. Vis, at hvis G er et direkte produkt, $G = G_1 \times G_2$, så er $\alpha_n(G) = \alpha_n(G_1)\alpha_n(G_2)$.

5. Angiv antallet af elementer af orden 2 i hver af følgende grupper: C_{60}, A_5, $A_4 \times C_5$, D_{30}, $D_3 \times D_5$.

6. Vis, at den cykliske gruppe C_4 er isomorf med en undergruppe af diedergruppen D_n, hvis og kun hvis n er delelig med 4.

7. Produktmængden $X := \{0,1\}^4$ af 4-sæt (x_1, x_2, x_3, x_4) med $x_i \in \{0,1\}$ kan opfattes som mængden af afbildninger $\{1,2,3,4\} \to \{0,1\}$. Følgelig virker S_4 på X. Beskriv isotropigrupperne for denne virkning.

8. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte $4 \times 4 = 16$ små farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 3 farver glas at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.

9. Lad S_1 og S_2 være grupper af orden 2^ν og lad H_1 og H_2 være grupper af ulige orden. Vis, at hvis $S_1 \times H_1$ og $S_2 \times H_2$ er isomorfe, så er S_1 og S_2 isomorfe.

10. Vis, at en gruppe af orden 880 ikke kan være simpel.

11. Bestem, i polynomiumsringen $\mathbb{F}_3[X]$, antallet af irreducible polynomier af grad 2.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^5 + 21X + 63$.

12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

13. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

14. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{F}_2[X]$, hvor $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2$ og koefficienterne i f fortolkes som restklasser modulo 2.

15. Angiv, i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$, primopløsningen af tallet $11 + 2i$.

Matematik 2AL, vinteren 1997–98

1. Bestem et helt tal a således, at $a \equiv 5 \pmod 8$ og $a \equiv 2 \pmod 9$. Hvilken orden, i gruppen $(\mathbb{Z}/72)^*$, har restklassen af a modulo 72?

2. I den symmetriske gruppe S_9 betragtes permutationen,

$$\sigma = \big((1\,2\,3\,4\,5)(5\,6\,7\,8\,9)\big)^3.$$

Bestem fortegnet for σ. Angiv typen af σ.

3. Angiv i gruppen A_7 et element af hver af de forekommende ordener.

4. Hvor mange permutationer i S_8 har typen $2^1 3^2$?

5. Vis, at følgende grupper parvis er ikke-isomorfe: C_{12}, $C_6 \times C_2$, A_4, $D_3 \times C_2$.

6. Vis, at Klein's Vier-gruppe V er isomorf med en undergruppe af diedergruppen D_n, hvis og kun hvis n er lige.

7. Vis, at hvis en kommutativ gruppe af orden 120 har et element af orden 24, så er gruppen cyklisk.

8. Talrummet $\mathbb{R}^4$ kan opfattes som mængden af afbildninger $\{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$. Følgelig virker S_4 på $\mathbb{R}^4$. Bestem isotropigruppen for vektoren $(1, 1, 0, 0)$. Angiv en vektor, hvis isotropigruppe har orden 2.

9. Vis, at en gruppe af orden $5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$ ikke kan være simpel.

10. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte $5 \times 5 = 25$ små farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 3 farver glas at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.

11. Vis, at netop ét af polynomierne $X^{12} - 8$, $X^{12} - 9$ og $X^{12} - 10$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$.

12. Angiv i $\mathbb{F}_2[X]$ et polynomium, som er reducibelt og uden rødder i $\mathbb{F}_2$.

13. Bestem i polynomiumsringen $\mathbb{F}_5[X]$ antallet af normerede irreducible polynomier af grad 2.

14. Afgør, i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$, hvilke af tallene $1 \pm 6\sqrt{-7}$, der har $2 + \sqrt{-7}$ som divisor. Hvilke divisorer har $2 + \sqrt{-7}$?

15. For hvilke tal $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ har ligningen $x^2 + y^2 = n!$ heltalsløsninger (x, y)?

Matematik 2AL, sommeren 1998

1. Bestem et helt tal a således, at $a \equiv 1 \pmod 4$, $a \equiv 2 \pmod 5$ og $a \equiv 5 \pmod 9$. Hvilken orden, i gruppen $(\mathbb{Z}/180)^*$, har restklassen af a modulo 180.

2. Om en gruppe G vides, at afbildningen $x \mapsto x^2$ er en homomorfi $G \to G$. Vis, at G er abelsk.

3. Vis, at der ved $x \mapsto 3x + 5$ defineres en permutation af mængden $\mathbb{Z}/10$. Angiv, idet tallene $0, 1, \dots, 9$ identificeres med deres restklasser modulo 10, cykelfremstillingen af denne permutation. Bestem permutationens orden og fortegn.

4. Bestem for den symmetriske gruppe S_6 antallet af elementer af orden 6.

5. Bestem det mindste naturlige tal n for hvilket A_n indeholder et element af orden 30.

6. Lad G være en gruppe af orden 60, og lad $a(G)$ betegne antallet af elementer i G af orden 5. Vis, at $a(G)$ er 4 eller 24, og vis, at begge muligheder kan forekomme.

7. Gør rede for, at en gruppe af orden $992 = 31 \cdot 32$ ikke kan være simpel.

8. En gruppe af orden 120 indeholder 8 elementer af orden 6. Vis, at gruppen ikke er kommutativ.

9. Hvor mange perlekæder med 8 perler kan der laves, når der er to farver perler at vælge imellem.

10. Hvor mange karusseller med 8 heste kan der laves, når der er to farver (træ-)heste at vælge imellem.

11. Lad L være et legeme med 2^ν elementer. Vis, at L har karakteristik 2, og beskriv strukturen af L's additive gruppe.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^{16} + 12$.

12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

13. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

14. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 17, om f har en rod i $\mathbb{F}_{17}$.

15. Hvor mange elementer i Gauss's talring $\mathbb{Z}[i]$ er divisorer i 150.

Matematik 2AL, vinteren 1998–99

1. Bestem et helt tal a således, at $a \equiv 3 \pmod 4$ og $a \equiv 6 \pmod{25}$. Hvilken orden, i gruppen $(\mathbb{Z}/100)^*$, har restklassen af a modulo 100.

2. Lad G være en endelig kommutativ gruppe. Vis, at afbildningen $x \mapsto x^2$, af G ind i G, er bijektiv, hvis og kun hvis G er af ulige orden.

3. Vis, at der ved $x \mapsto 7x + 2$ defineres en permutation af mængden $\mathbb{Z}/10$. Angiv, idet tallene $0, 1, \dots, 9$ identificeres med deres restklasser modulo 10, cykelfremstillingen af denne permutation. Bestem permutationens orden og fortegn.

4. Bestem for den symmetriske gruppe A_8 antallet af elementer af orden 2.

5. Bestem det mindste naturlige tal n for hvilket A_n indeholder et element af orden 1998. [Vink: $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$.]

6. Lad G være en gruppe af orden 120. Vis, at antallet af elementer i G af orden 5 er enten 4 eller 24, og vis, at begge muligheder kan forekomme.

7. Antag, at tallet $2^\nu - 1$ er et primtal. Gør rede for, at en gruppe af orden $2^\nu(2^\nu - 1)$ ikke kan være simpel.

8. Bestem en værdi af n således, at der er præcis 6 kommutative grupper af orden n.

9. Hvor mange karusseller med 10 heste kan der laves, når der er to farver (træ-)heste at vælge imellem.

10. Lad L være et legeme med 27 elementer. Vis, at L har karakteristik 3 og at L's additive gruppe er isomorf med $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^4 + 100X^3 + 100X + 50$.

11. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

13. Vis, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 3, at i $\mathbb{F}_3[X]$ er $X^2 + 1$ divisor i f.

14. Vis, at tallet $16 + 15i$ har en norm, der er delelig med 13. Angiv, i Gauss's talring $\mathbb{Z}[i]$, en primopløsning af $16 + 15i$.

15. Hvor mange elementer i Gauss's talring $\mathbb{Z}[i]$ er divisorer i 1998.

Matematik 2AL, sommeren 1999

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/385)^*$ ordenen af restklassen af 2.

2. Bestem potensen σ^{1999} af permutationen $\sigma = (1\,2)(7\,6)(2\,3)(5\,6)(3\,4)$ i S_7.

3. Vis, at der ved $x \mapsto x^3 + 3$ defineres en permutation af mængden $\mathbb{Z}/10$. Angiv, idet tallene $0, 1, \dots, 9$ identificeres med deres restklasser modulo 10, cykelfremstillingen af denne permutation. Bestem permutationens type, orden og fortegn.

4. Vis, at der findes en undergruppe af orden 15 i S_8. Findes der en undergruppe af orden 15 i S_7?

5. Bestem antallet af permutationer af type 2^3 i S_7 og i A_8.

6. Lad d være en ulige divisor i n. Vis, at diedergruppen D_n har præcis én undergruppe af orden d.

7. Betragt i en gruppe G to forskellige elementer a og b af orden 2. Vis, at ab har orden 2, hvis og kun hvis a og b kommuterer.

8. Lad p være et primtal. Bestem antallet af ikke-trivielle undergrupper af gruppen $C_p \times C_p$.

9. Vis, at Sylow-3-undergrupperne i S_6 er isomorfe med $C_3 \times C_3$.

10. Overfladen på badebolde, af perfekt kugleform, er delt i 10 lige store områder via en ækvator og 5 længdekredse (som på en globus), der deler ækvator i 5 lige store dele. Hvert område kan være farvet rødt eller hvidt. Hvor mange badebolde findes der?

I de næste fire opgaver betragtes polynomiet $f = X^4 + 1$.

11. Vis, at enhedsroden $\zeta = e^{2\pi i/8} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}$ er rod i f.

12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

13. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

14. Bestem, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 5, primopløsningen af f i $\mathbb{F}_5[X]$.

15. Vis, at normen af tallet $12 + 5\sqrt{-7}$ er delelig med 11. Bestem i talringen $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ en irreducibel opløsning af $12 + 5\sqrt{-7}$.

Matematik 2AL, vinteren 1999–2000

NB. Det kræves ikke godtgjort i besvarelsen, at 1999 er et primtal.

1. Vis, at restklassen af 2 modulo 1999 er invertibel, og angiv den inverse restklasse.

2. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/495)^*$ ordenen af restklassen af 2.

3. Vis, at for hvert helt tal a har kongruensen $x^3 \equiv a \pmod{10}$ en, og modulo 10 kun én, løsning x.

4. Angiv, idet $\sigma = (1\,2)(7\,6)(2\,3)(5\,6)(3\,4)$ i S_7, orden, cykeltype og fortegn for permutationen σ^{2000}.

5. Bestem det mindste naturlige tal n for hvilket den alternerende gruppe A_n indeholder et element af orden 2000.

6. Vis, at hvis den symmetriske gruppe S_n indeholder en undergruppe af orden 2000, så er $n \geqslant 15$. Vis, at S_{23} indeholder en kommutativ undergruppe af orden 2000.

7. Hvilken orden har Sylow-1999-undergruppen i S_{2000}.

8. For hvilke værdier af n indeholder diedergruppen D_n en undergruppe af orden 2000.

9. Lad H være en undergruppe af den symmetriske gruppe S_n. Vis, at enten er $H \subseteq \mathrm{A}_n$ eller også indeholder H det samme antal lige og ulige permutationer.

10. En kommutativ gruppe G af orden 2000 har præcis et element af orden 2 og præcis 4 elementer af orden 5. Vis, at G må være cyklisk.

11. Hvor mange forskellige perlekæder med 8 perler kan der laves, når der er 2 farver perler at vælge mellem.

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^{2000} - 1000X^2 - 50$.

12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

13. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

14. Vis, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 1999, at f har præcis 2 rødder i $\mathbb{F}_{1999}$. [Vink: brug for eksempel Fermat's lille sætning til at vise, for $x \in \mathbb{Z}$, at $2f(x) \equiv x^2 - 100 \pmod{1999}$.]

15. Bestem for $k = 2000$ en løsning $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ til ligningen $x^2 + y^2 = k^2$ således, at 5 ikke går op i x.

Matematik 2AL, sommeren 2000

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/693)^*$ ordenen af restklassen af 2. (Vink: $693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$.)

2. Betragt cyklerne $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6)$ og $\tau = (5\,6\,7\,8\,9)$ i S_9. Udregn cykelfremstillinger, ordener og fortegn af $\sigma\tau$, $\tau\sigma$ og $\tau\sigma\tau^{-1}$.

3. Vis at den symmetriske gruppe S_9 indeholder elementer af orden 14 og 20, men ingen elementer af orden 21.

4. Vis at følgende grupper er parvis ikke-isomorfe: S_4 , C_{24} , $C_4 \times C_6$, $A_4 \times C_2$.

5. Vis at hvis φ er en gruppehomomorfi fra $(\mathbb{Q}, +)$ til $(\mathbb{Z}, +)$, så er φ triviel, dvs. $\varphi(q) = 0$ for alle $q \in \mathbb{Q}$. (Vink: Start med at vise $\varphi(1) = 0$.)

6. For hvilke primtal p findes en ikke-triviel Sylow-p-undergruppe i den alternerende gruppe A_9, og hvilke ordener har de ikke-trivielle Sylow-p-undergrupper?

7. Vis at en gruppe af orden 135 ikke kan være simpel.

8. Angiv de kommutative grupper af orden $4851 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$.

9. Hvor mange perlekæder med 11 perler kan der laves, når der er 4 farver perler at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.

10. Vis at primtallet 5 er irreducibelt som element i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$. Er 5 et primelement i $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$? Er $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$ UFD?

11. Vis at $77 + 55\sqrt{2}$ er et primelement i ringen $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

12. Angiv i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsningen af tallet 380.

I de sidste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^5 + 38X^2 - 19$.

13. Afgør om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

14. Afgør om f er irreducibel osm polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

15. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 3, om f er irreducibel i ringen $\mathbb{F}_3[X]$.

Matematik 2AL, vinteren 2000–2001

1. Vis at gruppen $(\mathbb{Z}/189)^*$ indeholder mindst tre elementer af orden 6.

2. Betragt cyklerne $\rho = (1\,2\,3)$ og $\sigma = (3\,4\,5)$ og $\tau = (5\,6\,7)$ i S_7. Udregn cykelfremstillinger, ordener og fortegn af $\rho\sigma$ og $\sigma\tau$ og $\tau\rho$.

3. Bestem potensen σ^{665} af permutationen $\sigma = (3\,4)(2\,4)(4\,6)(4\,5)(1\,6)$ i S_6.

4. En permutation μ i S_{12} har typen $3^2 6^1$. Hvilken type har μ^3?

5. Vis at grupperne $D_6 \times C_2$ og $A_4 \times C_2$ ikke er isomorfe.

6. Vis at der er netop to forskellige gruppehomomorfier fra C_6 til C_2.

7. Angiv ordenerne af de ikke-trivielle Sylow-p-undergrupper i D_{12}.

8. Lad p være et primtal. Vis at Sylow-p-undergrupperne i S_p er isomorfe med Sylow-p-undergrupperne i S_{2p-1}.

9. Vis at hvis en kommutativ gruppe af orden 220 har et element af orden 4, så er den cyklisk.

10. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte $3 \times 3 = 9$ lige store farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 5 farver glas at vælge imellem? Det er nok at opsille et regneudtryk for antallet.

11. Angiv i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsninger af tallene $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,$ og $8 + 3i$.

12. Angiv i talringen $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ en primopløsning af tallet 31.

13. Vis at netop to af polynomierne $X^6 - 25$, $X^6 - 26$, og $X^6 - 27$ er reducible i polynomiumsringen $\mathbb{Q}[X]$.

14. Vis at polynomiet $f = X^3 - X + 1$ er irreducibelt i polynomiumsringen $\mathbb{F}_3[X]$.

15. Angiv en primopløsning af polynomiet $g = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 - X^2 + X + 1$ i polynomiumsringen $\mathbb{F}_3[X]$. [Vink: brug opgave 14.]

Matematik 2AL, sommeren 2001

1. Vis at gruppen $(\mathbb{Z}/44)^*$ har et element af orden 5.

2. I den symmetriske gruppe S_5 betragtes permutationen

$$\sigma = (1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3\ 4\ 5).$$

Udregn cykelfremstilling, orden og fortegn af σ.

3. I den symmetriske gruppe S_5 betragtes en permutation τ som opfylder $\tau \neq e$ og $\tau^5 = e$, hvor e er det neutrale element i S_5. Udregn cykeltype og fortegn af τ.

4. Angiv antallet af elementer af orden 3 i hver af følgende grupper: C_{60}, $A_4 \times C_5$, D_{30} og $D_3 \times D_5$.

5. Lad $(G, +)$ være en cyklisk gruppe og lad φ være en gruppehomomorfi fra $(G, +)$ til $(\mathbb{Q}, +)$. Vis at φ ikke kan være surjektiv.

6. Angiv de kommutative grupper af orden 56. Lad dernæst G være en gruppe af orden 56 som har netop 48 elementer af orden 7. Vis at G ikke er kommutativ.

7. Lad G være en gruppe af orden 56 og lad $a(G)$ betegne antallet af elementer i G af orden 7. Vis at $a(G)$ er 6 eller 48.

8. Angiv ordenerne af de ikke-trivielle Sylow-p-undergrupper i $A_4 \times A_5$.

9. Hvor mange karusseller med 12 heste kan der laves når der er 2 farver heste at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.

10. Betragt den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\tau]$ hvor $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ er rod i $X^2 - X - 1$. Afgør hvilke af tallene $4 + 3\tau$, $5 + 4\tau$, $6 + 5\tau$ og $7 + 6\tau$ der er primelementer i $\mathbb{Z}[\tau]$, idet det må benyttes uden bevis at $\mathbb{Z}[\tau]$ er et UFD.

11. Vis at $119+84\sqrt{2}$ ikke er et primelement i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Er $119+84\sqrt{2}$ et irreducibelt element i $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?

12. Bestem en irreducibel opløsning af tallet 4 i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

13. Afgør om X^2+1 er irreducibelt som polynomium i ringen $\mathbb{C}[X]$, og om det er irreducibelt som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

I de sidste to spørgsmål betragtes polynomierne $f = X^4 + 3X + 3$ og $g = X^2 + X + 1$.

14. Vis at f og g er irreducible som polynomier i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

15. Vis, idet koefficienterne i f og g identificeres med deres restklasser modulo 3, at f og g ikke er irreducible som polynomier i ringen $\mathbb{F}_3[X]$.

Matematik 2AL, vinteren 2001–2002

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/630)^*$ ordenen af restklassen af 11. (Vink: $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.)

2. I den symmetriske gruppe S_4 betragtes permutationerne $\sigma_2 = (1\ 2)$, $\sigma_3 = (1\ 2\ 3)$ og $\sigma_4 = (1\ 2\ 3\ 4)$. Udregn cykelfremstillinger, ordener og fortegn af $\sigma_2\sigma_3$ og $\sigma_2\sigma_3\sigma_4$.

3. Bestem de mulige ordener af elementer i den symmetriske gruppe S_6.

4. I den symmetriske gruppe S_{10} betragtes en permutation τ som opfylder $\tau^4 = e$, hvor e er det neutrale element i S_{10}. Hvilke muligheder er der for cykeltypen af τ?

5. Vis at grupperne $D_3 \times C_5 \times C_6$ og $S_3 \times C_3 \times C_{10}$ er isomorfe.

6. Vis at grupperne $D_{12} \times C_5$ og $S_4 \times C_5$ ikke er isomorfe.

7. Bestem for hvilke primtal p det gælder at Sylow-p-undergrupperne i S_p er isomorfe med Sylow-p-undergrupperne i D_p.

8. Vis at hvis en kommutativ gruppe af orden 234 har et element af orden 18, så er den cyklisk. (Vink: $234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$.)

9. Hvor mange perlekæder med 8 perler kan der laves når der er 5 farver perler at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.

10. Betragt den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\tau]$ hvor $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ er rod i $X^2 - X - 1$. Vis at der findes heltal a, b og c så $1 + a\tau$ er invertibel i $\mathbb{Z}[\tau]$ og så $1 + b\tau$ er et primelement i $\mathbb{Z}[\tau]$, men så $1 + c\tau$ hverken er invertibel eller et primelement i $\mathbb{Z}[\tau]$. Det må benyttes uden bevis at $\mathbb{Z}[\tau]$ er et UFD.

11. Bestem en irreducibel opløsning af tallet 73 i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-8}]$.

12. Afgør hvilke af primtallene 2, 3, 5, 7 og 11 der er primelementer i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

13. Afgør for hvert element α i $\mathbb{F}_5$ om polynomiet $f_\alpha = X^3 + X^2 + \alpha$ er irreducibelt i ringen $\mathbb{F}_5[X]$.

I de sidste to spørgsmål betragtes polynomiet $g = X^4 + X^2 + 1$.

14. Afgør om g er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

15. Afgør, idet koefficienterne i g identificeres med deres restklasser modulo 2, om g er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{F}_2[X]$.

Matematik 2AL, sommeren 2002

Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig, og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker *ikke* ned og anbefales ved større ændringer.

1. Angiv en gruppeisomorfi $\psi\colon (\mathbb{Z}/210)^* \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}/7)^* \times (\mathbb{Z}/30)^*$. Bestem ordenen af elementet $[\,31\,]_{210}$ i $(\mathbb{Z}/210)^*$.

2. Bestem cykelfremstillingen af $\sigma = (1234)(34567)(89) \in S_9$ samt $|\sigma|$ og $\operatorname{sign}(\sigma)$.

3. Bestem $\sigma \in S_{10}$, så $|\sigma| = 20$, samt $\tau \in S_{10}$, så $|\tau| > 20$.

4. Bestem samtlige elementordener i gruppen $C_2 \times C_3 \times C_4 \times C_7$.

5. Afgør, om grupperne $G = A_4 \times D_5$ og $H = S_3 \times D_{10}$ er isomorfe.

6. Antag, at G er en *kommutativ* gruppe med $|G| = 140$, samt at der findes $g \in G$ med $|g| = 20$. Bevis, at G er cyklisk. (Udnyt, at $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$.)

7. Lad $\varphi\colon A_5 \to C_{30}$ være en vilkårlig gruppehomomormorfi. Begrund, at φ ikke kan være injektiv. Bevis, at φ er triviel, dvs. $\varphi(\sigma) = 1$ for alle $\sigma \in A_5$. (Udnyt, at kernen for φ er en normal undergruppe af A_5.)

8. Lad G være en gruppe af orden 2002. Begrund, at G ikke er simpel. (Udnyt faktoriseringen $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ til at bestemme antallet af Sylow–11–undergrupper.)

9. Begrund, at $X^{2002} + 2002$ er irreducibelt i $\mathbb{Z}[\,X\,]$. (Udnyt, at $2002 = 2 \cdot 1001$.)

10. Afgør, om $X^{2002} + 2002$ er irreducibelt i $\mathbb{R}[\,X\,]$.

11. Afgør, om $X^{1936} - 1936$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[\,X\,]$.

I de sidste fire opgaver betragtes den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$ med $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-2}$. Det oplyses, at $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$ er UFD (og dette ønskes ikke uddybet).

12. Bestem diskriminanten $\mathrm{D}(\xi)$. Bestem normen $\mathrm{N}(x + y\xi)$, når $x, y \in \mathbb{Z}$.

13. Afgør, om $1 - 2\xi$ er divisor i $13 + 10\xi$ inden for $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

14. Afgør hvilke af elementerne $1 + \xi$, 3, $1 + 3\xi$ og $8 + 3\xi$, der er primelementer i $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

15. Bestem normen $\mathrm{N}(21 + 6\xi)$ samt primopløsningen af $21 + 6\xi$ inden for $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

Matematik 2AL, vinteren 2002–03

Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig, og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker *ikke* ned og anbefales ved større ændringer.

1. Bestem ordenen af elementet $[\,4\,]_n$ i den multiplikative gruppe $(\mathbb{Z}/n)^*$ for $n \in \{7, 11, 13\}$. Bestem endvidere ordenen af $[\,4\,]_{1001}$ i $(\mathbb{Z}/1001)^*$. $(1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.)$

2. Bestem cykelfremstilling, orden og fortegn for $\sigma = (12)(123)(1234)(12345) \in \mathrm{S}_5$.

3. Antag, at $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_9$ har $|\sigma| = 5$, og $|\tau| = 6$. Afgør, om $|\sigma\tau| = 12$ kan forekomme. Afgør, om $|\sigma\tau| = 30$ kan forekomme.

4. Betragt de additive kvotientgrupper $\mathbb{Z}/123$ og $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Bestem en *injektiv* gruppehomomorfi $\varphi\colon \mathbb{Z}/123 \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

5. Lad $\psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ være en gruppehomomorfi. Begrund, at ψ ikke er surjektiv.

6. Bestem i gruppen $G \overset{\text{Def}}{=\!=} D_3 \times D_6$ et element g^*, som ikke er det neutrale element, således at g^* kommuterer med alle elementer, dvs. $g^*g = gg^*$ for alle $\in G$.

7. Bevis, at grupperne $G = D_3 \times D_6$ og $H = A_4 \times D_3$ ikke er isomorfe. (Udnyt resultatet i opgave 6.)

8. Begrund, at gruppen G ikke er simpel, hvis $|G| = 6009$. (2003 er et primtal!)

9. Afgør, om $X^{2002} - 2025$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[\,X\,]$.

10. Afgør, om $X^{2002} - 2003$ er irreducibelt i $\mathbb{R}[\,X\,]$.

11. Afgør, om $X^{2002} - 2003$ er irreducibelt i $\mathbb{Z}[\,X\,]$.

I de sidste fire opgaver betragtes den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$ med $\xi \overset{\text{Def}}{=\!=} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$, som er rod i $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}[\,X\,]$. Ringen $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$ *er* UFD (og dette ønskes ikke uddybet).

12. Bestem diskriminanten $\mathrm{D}(\xi)$. Bestem normen $\mathrm{N}(x + y\xi)$, når $x, y \in \mathbb{Z}$.

13. Afgør hvilke af elementerne ξ, $1 + \xi$ og $1 - \xi$, der er enheder i $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

14. Afgør hvilke af elementerne $1 - \xi$, 3 og $1 + 3\xi$, der er primelementer i $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

15. Bestem normen $\mathrm{N}(4 + 5\xi)$ samt primopløsningen af $4 + 5\xi$ inden for $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

Matematik 2AL, sommeren 2003

I besvarelsen må benyttes, at $22176 = 288{\cdot}7{\cdot}11$, at $2002 = 2{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13$, og at 2003 er et primtal.

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/22176)^*$ ordenen af restklassen af 17.

2. Bestem cykeltype, orden og fortegn for permutationen $(1\,2\,3\,4\,5\,6)(1\,7\,6)(1\,8\,9)(1\,0\,7)$; det er en permutation af de 10 cifre $0, 1, \dots, 9$.

3. Bestem den største mulige orden af en permutation i den alternerende gruppe A_9.

4. Bestem de mulige cykeltyper for permutationer af orden 2 i S_6. Hvor mange permutationer σ i S_6 opfylder, at $\sigma^2 = \mathrm{id}$?

5. Betragt 4-cyklen $\gamma = (1\,2\,3\,4)$ i S_4. Findes der en lige permutation σ i S_4 således, at $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^3$? Findes der en ulige permutation σ i S_4 således, at $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^3$? Findes der en permutation σ i S_4 således, at $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^2$?

6. Angiv de kommutative grupper, der har orden 80 og præcis 3 elementer af orden 2.

7. Bestem 4 ikke-kommutative grupper af orden 120, for hvilke antallene af elementer af orden 2 er forskellige.

8. Vis, at en gruppe G af orden $7^3{\cdot}19^3$ ikke kan være simpel.

9. Lad $\varphi\colon \mathrm{C}_{15} \to \mathrm{C}_{10}$ være en ikke-triviel gruppehomomorfi. Vis, at kernen for φ har orden 3, og at billedet for φ har orden 5. Vis, at der findes en sådan homomorfi.

10. Lad p være et ulige primtal. Hvor mange perlekæder med p perler kan der laves, når der er 2 farver perler at vælge mellem?

11. Bestem i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsninger af tallene 2002 og 2003. Angiv for hvert af disse to tal antallet af divisorer.

12. Hver koefficient i polynomiet $f = X^{2002} - 1$ er 0, 1 eller -1, og f kan opfattes som polynomium i $L[X]$ for et vilkårligt legeme L. Hvor mange rødder har polynomiet i L, når (a) $L = \mathbb{R}$, (b) $L = \mathbb{C}$, (c) $L = \mathbb{F}_{2003}$, (d) $L = \mathbb{F}_{29}$?

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^4 + 67$.

13. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

14. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.

15. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 2003, om f er irreducibel i $\mathbb{F}_{2003}[X]$. [Vink: $2003 - 67$ er et kvadrattal.]

Matematik 2AL, vinteren 2003–04

I besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $63457 = 31 \cdot 2047$, at $2^{11} = 2048$, at 2003 er et primtal, og at $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/63457)^*$ ordenen af restklassen af 2.

2. Hvor mange elementer i $(\mathbb{Z}/2003)^*$ har orden 13?

3. Idet de 15 tal $0, 1, \dots, 14$ identificeres med deres restklasser modulo 15, bestemmes en permutation af disse tal ved forskriften $x \mapsto 2x \pmod{15}$. Bestem cykelfremstilling, type, orden og fortegn for denne permutation.

4. Angiv cykeltyperne for permutationer af orden 6 i den alternerende gruppe A_{11}.

5. Lad γ være en given permutation i S_n. Vis, at der altid findes permutationer $\sigma \in \mathrm{S}_n$, som opfylder ligningen $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^{-1}$. Vis, at når σ opfylder ligningen, så vil også $\sigma\gamma$ opfylde ligningen. Vis, at når γ er en ulige permutation, så er ligningen altid opfyldt med en lige permutation σ.

6. Angiv de kommutative grupper, der har orden 162 og indeholder præcis 8 elementer af orden 3.

7. Bestem 4 ikke-kommutative grupper af orden 60, for hvilke antallene af elementer af orden 2 er forskellige.

8. Vis, at en gruppe af orden $3^3 \cdot 13$ ikke kan være simpel.

9. Om en gruppe G vides, at $|G| = 60$ og at G er simpel. Bestem antallet af elementer af orden 5 i G.

10. Lad $\varphi\colon \mathrm{S}_4 \to \mathrm{C}_{10}$ være en ikke-triviel gruppehomomorfi. Vis, at billedet for φ har orden 2 og at kernen for φ har orden 12. Vis, at der findes en sådan homomorfi.

11. Hvor mange perlekæder med 9 perler kan der laves, når der er 2 farver perler at vælge mellem?

12. Bestem i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsninger af tallene 5, $5+i$, $5+2i$, og $5+3i$.

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^6 + 2003$.

13. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

14. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.

15. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 13, om f er irreducibel i $\mathbb{F}_{13}[X]$.

Matematik 2AL, sommeren 2004

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. I besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $2004 = 2^2{\cdot}3{\cdot}167$, og at 167 er et primtal.

1. Bestem den største orden af et element i gruppen $(\mathbb{Z}/2004)^*$.

2. Idet tallene $0, 1, 2, \dots, 10$ identificeres med deres restklasser modulo 11, bestemmes en permutation af disse tal ved forskriften $x \mapsto x^3{+}3 \pmod{11}$. Bestem cykelfremstilling, type, orden og fortegn for denne permutation.

3. Hvilke permutationer konjugerer $(1\,2)(3\,4\,5)$ over i $(1\,2\,3)(4\,5)$? Hvilke af dem er lige?

4. Gruppen S_n kan opfattes som undergruppen af S_{n+2} bestående af de permutationer, der har $n+1$ og $n+2$ som fikspunkt. Lad $\tau = (n{+}1\; n{+}2)$ være transpositionen, der ombytter $n+1$ og $n+2$. For hver permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ sættes $\sigma^* = \sigma$, hvis $\sigma \in A_n$, og $\sigma^* = \sigma\tau$ ellers. Vis, at afbildningen $\sigma \mapsto \sigma^*$ er en injektiv homomorfi $\mathrm{S}_n \to \mathrm{A}_{n+2}$.

5. Vis, at gruppen $G = \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_3$ er den eneste kommutative gruppe, der har orden 72 og indeholder 24 elementer af orden 6.

6. Gruppen $(\mathbb{Z}/16)^*$ er isomorf med et produkt af cykliske grupper. Angiv dette produkt.

7. Gruppen S_5 virker på mængden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, og dermed også på mængden $\mathcal{P}$ af alle delmængder af denne mængde. Bestem under denne virkning af S_5 på $\mathcal{P}$ isotropigruppen for $\{1, 2\}$, og banen gennem $\{1, 2\}$.

8. Vis, at der kun er én gruppe af orden $7 \cdot 11 \cdot 13$.

9. Vis, at hvis σ og τ er disjunkte 5-cykler i S_{15}, så udgør permutationerne af formen $\sigma^i\tau^j$ en undergruppe af orden 25. Vis, at Sylow-5-undergrupperne i S_{15} er isomorfe med $\mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_5$.

10. Lad m betegne antallet af Sylow-3-undergrupper i en gruppe af orden 60. Bestem de værdier af m, der er mulige ifølge Sylow's sætninger. Giv for hver af disse værdier af m et eksempel på en gruppe af orden 60 med præcis m Sylow-3-undergrupper.

11. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte $3 \times 3 = 9$ små farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når midterkvadratet skal være gult og hvert af de øvrige 8 kvadrater skal have en af farverne rød, grøn eller blå.

12. Vis, i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$, at tallet $3-2\sqrt{11}$ er divisor i $53-12\sqrt{11}$. Vis, at tallet $3-2\sqrt{11}$ har en ikke-triviel divisor. [Vink: led blandt tal med norm 5.] Bestem en irreducibel opløsning af $53-12\sqrt{11}$.

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^4 + 12X^2 + 9$.

13. Afgør, om $f(X)$ er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

14. Afgør, om $f(X)$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$. [Vink: kig på polynomiet $f(X+1)$.]

15. For et primtal $p > 3$ identificeres koefficienterne i f med deres restklasser modulo p. Vis, at hvis f i $\mathbb{F}_p$ har roden a, så har f fire rødder i $\mathbb{F}_p$, nemlig $\pm a$ og $\pm 3a^{-1}$.

Inden mundtlig eksamen blev det besluttet, „at 13 helt rigtigt besvarede opgaver regnes for fuld besvarelse; i praksis foregår justeringen ved at de to dårligst besvarede opgaver ikke indgår i vurderingen.“

Matematik 2AL, vinteren 2004–05

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. I besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $2004 = 2^2{\cdot}3{\cdot}167$, at $2005 = 5{\cdot}401$, og at 167 og 401 er primtal.

1. Hvilken orden har gruppen $(\mathbb{Z}/2005)^*$? Bestem den største orden af et element i denne gruppe.

2. Idet $\sigma := (1\,2\,3\,4)(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9)(6\,7\,8\,9)$ ønskes bestemt cykelfremstilling, type, orden og fortegn for σ. Bestem potensen σ^{2004}.

3. Bestem det mindste naturlige tal n således, at A_n indeholder en permutation af orden 2004.

4. Bestem de mulige cykeltyper for de permutationer σ i S_6, som opfylder, at σ^2 har cykeltypen $1^2 2^2$, altså er en dobbelttransposition.

5. Hvor mange permutationer i S_6 kommuterer med dobbelttranspositionen $(1\,2)(3\,4)$?

6. Bestem de kommutative grupper af orden $5^3{\cdot}31$.

7. Vis, at en gruppe af orden $5^3{\cdot}31$ ikke kan være simpel.

8. Hvilken orden har Sylow-167-undergruppen i S_{2004}?

9. Betragt den kvadratiske talring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. Vis, at tallene $2 \pm \sqrt{7}$ er irreducible og ikke associerede i R. Vis, at tallene $3 \pm \sqrt{7}$ er irreducible og associerede i R.

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^{2010} + 580$.

10. Afgør, om $f(X)$ er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

11. Afgør, om $f(X)$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.

12. Idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 401, kan f opfattes som polynomium i $\mathbb{F}_{401}[X]$. Vis, at restklassen af 2 modulo 401 er rod. Hvor mange rødder har polynomiet i $\mathbb{F}_{401}$? [Vink: Vis, og udnyt, at for alle $a \in \mathbb{F}_{401}^*$ er $a^{2010} = a^{10}$.]

13. Lagkager, bestående af 6 ens stykker, glaceres sådan, at hvert stykke er ensfarvet. Der er glasur af 4 forskellige farver. Hvor mange forskellige lagkager findes der?

14. Hvor mange forskellige perlekæder med 6 glasperler findes der, når der er perler af 4 forskellige farver?

15. På hvor mange måder kan man lægge æbleskiver af 4 forskellige farver i en æbleskivepande, når det midterste af de 7 huller skal være tomt?