LinAlg
Skriftlig prøve
7. april 2009, 10–13

Dette eksamenssæt løber over 5 sider, denne side inklusive.

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregnere eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt ti underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen.

Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Ved den samlede bedømmelse indregnes, med vægt 30%, et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i kursets forløb.

I løbet af hele eksamen skal eventuelle kommunikationsfaciliteter i lommeregnere og computere være slået fra.

Opgave 1

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt 4×4-matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Find samtlige løsninger til det lineære ligningssystem

$$\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(b) Lad $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ være den lineære afbildning

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Bestem en basis for $\ker f$ som indeholder vektoren $\begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Opgave 2

Betragt matricerne

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}}(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

(a) Udregn $\det \underline{\underline{A}}$ og vis, at $\det \underline{\underline{B}}(x) = 12(1-x)$ med angivelse af detaljerede mellemregninger.

(b) Bestem mængden af de $x \in \mathbf{R}$ for hvilke matricerne $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}(x)\underline{\underline{B}}(2x)$ har samme determinant.

Opgave 3

Betragt den lineære afbildning $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ defineret ved

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 - x_3 \\ -2x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_1 + x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem en matrix $\underline{\underline{A}}$ så

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestem en basis for billedrummet $f(\mathbf{R}^4)$ og angiv dimensionen af $\ker f$.

Opgave 4

Betragt vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

i $\mathbf{R}^3$ og lad $U = \text{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$.

(a) Vis, at $\dim U = 2$ og bestem en ortonormal basis $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ for U.

(b) Bestem en enhedsvektor $\underline{b} \in \mathbf{R}^3$ som er ortogonal på U.

Opgave 5

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt matricen

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 & -6 \\ -4 & 5 & 6 & 1 \\ -1 & 6 & 5 & 4 \\ -6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem en vektor

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$$

som opfylder $a_1 = 1$ og $\underline{\underline{B}}^n \, \underline{a} = 2^n \underline{a}$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bestem en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$ så

$$\underline{\underline{S}} \, \underline{\underline{B}} \, \underline{\underline{S}}^t = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

> *with*(*LinearAlgebra*) :

Opgave 1

> $A := \langle\langle 3, 1, 2, 1\rangle | \langle 2, -1, 3, 4\rangle | \langle 1, -1, 2, 3\rangle | \langle 4, 0, 4, 4\rangle | \langle 10, -1, 11, 12\rangle\rangle;$

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 11 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 12 \end{bmatrix} \tag{1}$$

> *GaussianElimination*(A);

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Opgave 5

> $B := \langle\langle 5, -4, -1, -6\rangle | \langle -4, 5, 6, 1\rangle | \langle -1, 6, 5, 4\rangle | \langle -6, 1, 4, 5\rangle\rangle$

$$B := \begin{bmatrix} 5 & -4 & -1 & -6 \\ -4 & 5 & 6 & 1 \\ -1 & 6 & 5 & 4 \\ -6 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \tag{3}$$

> *Eigenvectors*(B);

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$