Nød

Nilin Abrahamsen

January 12, 2010

En algebraisk kurve defineres som nulpunkterne for et reelt polynomium $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i to variable. (Det underforstås i besvarelsen, at der ikke er tale om nulpolynomiet) Lad p og q være reelle polynomier i én variabel. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ defineres ved $f(t) = (p(t), q(t))$. Det skal vises, at billedet af f er indeholdt i en algebraisk kurve. For at gøre dette vises det, at der findes et polynomium $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, så $P \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er nulfunktionen. Definér først V_n som mængden af reelle polynomier i én variabel af grad højst n. Definér desuden W_n som mængden af polynomier $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, der kan skrives som:

$$P(x, y) = \sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j$$

Hvor $i, j \in \mathbb{N}_0$ og $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Kald n for graden $\deg(P)$ af P.
V_n er et vektorrum over $\mathbb{R}$ af dimension $n + 1$, og W_n er et vektorrum over $\mathbb{R}$ af dimension $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$. For at vise sidste påstand bemærkes det, at mængden af funktioner $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er et vektorrum. Hvis W_n er spannet af et uafhængigt sæt B af funktioner, er det et underrum med B som basis, og dimensionen er antallet af elementer i B. Lad B bestå af elementerne i mængden $\{f : (x, y) \to x^i y^j | i + j \leq n \wedge i, j \in \mathbb{N}_0\}$. Så er W_n netop spannet af B. At B er uafhængigt ses af, at et polynomium i to variable kun er nulfunktionen, hvis alle koefficienter er nul, d.v.s. at en lineær kombination af elementer i B kun er nulvektoren, hvis alle koefficienter er nul. B har $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ elementer, så dette antal er dimensionen af W_n.
Betragt et polynomium $P \in W_n$. Dan ud fra kurven f den sammensatte funktion $P \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Denne funktion er udtrykt ved:

$$P \circ f(t) = P(p(t), q(t)) = \sum_{i+j \leq n} a_{ij} p(t)^i q(t)^j = \sum_{i+j \leq n} l_{ij}(t)$$

Hvor $l_{ij}(t)$ er leddet $a_{ij}p(t)^i q(t)^j$. Lad $d_p = \deg(p)$ og $d_q = \deg(q)$, og bestem $m = \max(d_p, d_q)$. Et polynomium af grad n opløftet i k'te potens er et polynomium af grad nk. p^i og q^j er derfor polynomier af grad hhv. $d_p i \leq mi$ og $d_q j \leq mj$. Når disse ganges sammen fås et polynomium af grad $d_p i + d_q j \leq mi + mj = m(i+j) \leq mn$, da der for hvert led gælder $i + j \leq n$. Vi har derfor $p^i q^j \in V_{mn}$, og deraf $l_{ij} = a_{ij} p^i q^j \in V_{mn}$.
Følgelig er også summen $\sum_{i+j \leq n} l_{ij}$ i V_{mn}, så:

$$P \circ f \in V_{mn}$$

Vi kan nu definere en afbildning $\phi : W_n \to V_{mn}$ ved $\phi(P) = P \circ f$. Det viser sig, at ϕ er en lineær transformation. Den opfylder nemlig linearitetsbetingelserne:
Lad der være givet polynomier $a, b \in W_n$ og skalaren $r \in \mathbb{R}$. Da er:

$$\phi(a + b) = (a + b) \circ f = a \circ f + b \circ f = \phi(a) + \phi(b)$$

$$\phi(ra) = (ra) \circ f = r(a \circ f) = r\phi(a)$$

Målet er at vise, at der er et polynomium P, ikke nulpolynomiet, så $P \circ f$ er nulfunktionen $0_{\mathbb{R}}$. Det betyder, at ϕ sender P til $\phi(P) = P \circ f = 0_{\mathbb{R}}$. Et sådant element findes i W_n, hvis kernen af f har dimension > 0, hvilket vi kan sikre os, hvis $f : W_n \to V_{mn}$ afbildes i et rum med mindre dimension end domænet. Vi skal altså finde $n \in (N)$, så:

$$\begin{aligned}
\dim(W_n) &> \dim(V_{mn}) && (1)\\
&\Updownarrow && (2)\\
\frac{1}{2}(n+1)(n+2) &> mn+1 && (3)\\
&\Updownarrow && (4)\\
\frac{1}{2}(n^2+3n+2) &> mn+1 && (5)\\
&\Updownarrow && (6)\\
n^2+3n+2 &> 2mn+2 && (7)\\
&\Updownarrow && (8)\\
n^2+3n &> 2mn && (9)\\
&\Updownarrow && (10)\\
n+3 &> 2m && (11)\\
&\Uparrow && (12)\\
n &= 2m-2 && (13)
\end{aligned}$$

Hvis vi altså vælger $n = 2m-2$, hvor $m = \max(d_p, d_q)$, så gælder $\dim(W_n) > \dim(V_{mn})$. (For $m = 0$ kan kan vi ikke gøre dette, men så kan vi vælge $n = 1$) Da ϕ afbilder ind i V_{mn} er rangen $rg(f) \leq \dim(V_{mn})$, hvilket sammen med dimensionssætningen (s. 109 NVP) giver:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f) + \dim(ker) &= \dim(W_n) && (14)\\
&\Downarrow && (15)\\
\dim(V_{mn}) + \dim(ker) &\geq \dim(W_n) && (16)\\
&\Downarrow && (17)\\
\dim(ker) &\geq \dim(W_n) - \dim(V_{mn}) > 0 && (18)
\end{aligned}$$

Der findes altså et polynomium $P \in W_{\max(2m-2,1)}$ af orden

$$\deg(P) \leq \max(2m-2, 1)$$

så $P \circ f$ er nulfunktionen. Kald den algebraiske kurve givet ved P for $K_P = P^{-1}(\{0\})$. Det skal vises, at billedet af f er indeholdt i K_P. Der gælder følgende implikationer for et punkt $x \in \mathbb{R}^2$:

$$x \in f(\mathbb{R}) \tag{19}$$
$$\Downarrow \tag{20}$$
$$\exists t \in \mathbb{R} : x = f(t) \tag{21}$$
$$\Downarrow \tag{22}$$
$$\exists t \in \mathbb{R} : P(x) = P \circ f(t) = 0 \tag{23}$$
$$\Downarrow \tag{24}$$
$$P(x) = 0 \tag{25}$$
$$\Downarrow \tag{26}$$
$$x \in K_P \tag{27}$$

Dette medfører $f(\mathbb{R}) \subseteq K_P$, så billedet af f er indeholdt i den algebraiske kurve. $\deg(P) \leq \max(2m - 2, 1) = \max(2d_p - 2, 2d_q - 2, 1)$, så for et polymium P_{min} af minimal grad, der definerer et kurve indeholdende $f(\mathbb{R})$ gælder: $\deg(P_{min}) \leq \max(2d_p - 2, 2d_q - 2, 1)$.

Eksempler

(1) Lad $f(t) = (p(t), q(t)) = (t^2, t^3)$. Ovenstående viser, at der findes et polynomium P af grad $\deg(P) \leq \max(2d_p - 2, 3d_q - 2, 1) = 4$, så $f(\mathbb{R})$ er indeholdt i K_P. Et eksempel på et sådant er givet ved $P(x, y) = x^3 - y^2$. Billedet af f ligger i K_P, da $P \circ f(t) = P(t^2, t^3) = (t^2)^3 - (t^3)^2 = 0$.

(2) Lad $f(t) = (p(t), q(t)) = (t^2 + t, t^3)$. Ligesom før skal der være et polynomium P af grad $\deg(P) \leq 4$, så $f(\mathbb{R})$ er indeholdt i K_P. Det opfyldes af

$$P(x, y) = x^3 - y^2 - 3xy - y$$

Det kunne fremkommet ved at betragte $G(x, y) = x^3$. Indsæt $f(t)$ for at få

$$G(t^2 + t, t^3) = (t^2 + t)^3 = t^6 + 3t^5 + 3t^4 + t^3$$

Der konstrueres $H(x, y) = y^2 + 3xy + y$, så

$$H \circ f(t) = H(t^2 + t, t^3) = t^6 + 3(t^2 + t)(t^3) + t^3 = t^6 + 3t^5 + 3t^4 + t^3 = G \circ f(t)$$

Da $P = G - H$ har vi $P \circ f = (G - H) \circ f = G \circ f - H \circ f = 0$.

(3)

$$f(t) = (t^2 + t, t^2)$$

Der er polynomiumier P, så

$$\deg(P) \leq \max(2d_p - 2, 2d_q - 2, 1) = 2$$

$P(t) = x^2 + y^2 - y - 2xy$ er sådan et.