LinAlg
Skriftlig prøve
27. januar 2010, 9–12
Opgavesæt & besvarelse

Dette eksamenssæt løber over 5 sider, denne side inklusive.

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregnere eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt ti underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen.

Besvarelsen udfærdiges på de af eksamensvagterne udleverede ark og må ikke indskrives i selve eksamenssættet. Ved besvarelsen må blyant gerne benyttes.

Ved den samlede bedømmelse indregnes, med vægt 30%, et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i kursets forløb.

I løbet af hele eksamen skal eventuelle kommunikationsfaciliteter i lommeregnere og computere være slået fra.

En vejledende besvarelse er indført i lilla tekst.

Opgave 1

Betragt 4×4-matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Find samtlige reelle løsninger til det lineære ligningssystem

$$\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Vis, at ligningssystemet

$$\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

har uendelig mange reelle løsninger hvis og kun hvis $b = 1$. Find disse løsninger for $b = 1$.

$(a), (b)$ Vi opstiller totalmatricen for det inhomogene ligningssystem og reducerer til trappeform

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \text{b} \\ 4 & 1 & 0 & \text{-2} & 4 \\ \text{-2} & 0 & 0 & 1 & \text{-2} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \text{b} \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \text{-4} & \text{-2} & \text{4-4b} \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \text{2b-2} \end{array}\right),$$

hvor vi har udført rækkeoperationerne $R_3 \rightarrow R_3 - 4R_2, R_4 \rightarrow R_4 + 2R_2, R_1 \leftrightarrow R_2$,

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \text{b} \\ 0 & 1 & \text{-4} & \text{-2} & \text{4-4b} \\ 0 & 0 & 18 & 9 & \text{16b-16} \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \text{2b-2} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \text{b} \\ 0 & 1 & \text{-4} & \text{-2} & \text{4-4b} \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \text{2b-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{2-2b} \end{array}\right)$$

hvor vi først har udført $R_2 \rightarrow R_2 - 4R_3, R_2 \leftrightarrow R_3$ og i sidste skridt $R_3 \rightarrow R_3 - 9R_4, R_3 \leftrightarrow R_4$.

(a) For at løse det homogene ligningssystem ser vi, at x_4 er en fri variabel, så vi sætter $x_4 = t$ og får så ligningerne

$$2x_3 + t = 0, \quad x_2 - 4x_3 - 2t = 0, \quad x_1 + x_3 = 0,$$

og finder successivt

$$x_3 = -\tfrac{1}{2}t, \quad x_2 = 4x_3 + 2t = 0, \quad x_1 = \tfrac{1}{2}t,$$

altså

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi kan eksempelvis formulere dette som at samtlige løsninger til (a) er et en-dimensionalt underrum af $\mathbb{R}^4$ frembragt af søjlevektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b)

Den reducerede totalmatrix viser, at ligningssystemet i (b) ikke har nogen løsninger hvis $-2b+2 \neq 0$, men denne betingelse er netop $b \neq 1$. På den anden side, hvis vi sætter $b = 1$ i den reducerede totalmatrix overfor, så er igen $x_4 = t$ en fri variabel og vi får ligningerne

$$2x_3 + t = 0, \quad x_2 - 4x_3 - 2t = 0, \quad x_1 + x_3 = 1,$$

så vi finder

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi har altså fundet, at der er uendelig mange løsninger i tilfældet $b = 1$.

Opgave 2

Betragt matricerne

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2-i \\ 0 & i & 3+i \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3+i & 4i & i \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 1+i & 1+i & 1+i \\ -1+i & -1+i & -1+i \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2-i \\ i & -1+2i & 4+3i \\ 1 & 1+i & 2-2i \end{pmatrix}.$$

(a) Det oplyses, at netop to af disse matricer har determinanten 1. Find disse to matricer, idet svaret skal begrundes.

(b) Vis, at $\det(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}) = 0$.

(a) Da $\underline{\underline{A}}$ er en øvre trekantsmatrix er determinanten produktet af diagonalelementerne, altså $\det(\underline{\underline{A}}) = 1 \cdot i \cdot -i = 1$.

Determinanten af $\underline{\underline{B}}$ findes ved at udvikle efter tredie søjle, altså

$$\det(\underline{\underline{B}}) = i \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = i(9-8) = i.$$

Vedrørende $\underline{\underline{C}}$ bemærkes, at anden række multipliceret med i giver tredie række, og derfor må determinanten være 0, da vi ved en rækkeoperation kan opnå, at tredie række bliver nul-rækken. Altså $\det(\underline{\underline{C}}) = 0$.

Af de givne oplysninger sluttes nu at $\det(\underline{\underline{D}}) = 1$. Dette ses iøvrigt også ved de to rækkeoperationer $R_2 - iR_1$, $R_3 - R_1$, som omformer $\underline{\underline{D}}$ til $\underline{\underline{A}}$.

(b) Af produktreglen (Sætning 3.4.8) følger

$$\det(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}) = \det(\underline{\underline{A}})\det(\underline{\underline{B}})\det(\underline{\underline{C}})\det(\underline{\underline{D}}) = 1 \cdot i \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

Opgave 3

Betragt afbildningen $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ defineret ved

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \\ 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Redegør for, at f er lineær og surjektiv, og at $\dim \ker f = 2$.

(b) Bestem en basis for $\ker f$.

(a) Der gælder klart $f(x) = \underline{\underline{A}}x$, hvor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \ \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

altså er f en lineær afbildning med matrix $\underline{\underline{A}}$. Ved rækkeoperationen $R_2 \to R_2 - 2R_1$ fås

$$\underline{\underline{A}} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

som er en trin-2 matrix. Ifølge f. eks. Opskrift 4.6.1 er billedrummet for f udspændt af de to første søjler i $\underline{\underline{A}}$ altså 2-dimensionalt. Dette viser, at billedrummet er hele $\mathbb{R}^2$, så f er surjektiv.

Dimensionsætningen giver så $4 = \dim \ker f + \dim f(\mathbf{R}^4) = \dim \ker f + 2$, altså $\dim \ker f = 2$.

(b) For at bestemme kernen skal vi løse ligningssystemet $\underline{\underline{A}}x = \underline{0}$, og da vi har reduceret matrix $\underline{\underline{A}}$ ser vi, at vi kan sætte $x_3 = s, x_4 = t$ og bestemmer x_1, x_2 af ligningerne

$$-4x_2 + 5s + 6t = 0, \ x_1 + 2x_2 - s - 2t = 0.$$

Heraf fås først $x_2 = \frac{5}{4}s + \frac{3}{2}t$ og dernæst $x_1 = -\frac{3}{2}s - t$, så den fuldstændige løsning er

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}s - t \\ \frac{5}{4}s + \frac{3}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R}.$$

Som basis kan vi vælge de to vektorer, der står efter s og t. Hvis vi ønsker en basis bestående af hele tal, kan vi angive en basis ved at gange den første vektor med 4 og den anden med 2, og vi får således følgende basis for $\ker f$:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

i $\mathbb{R}^4$ og lad $U = \text{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$.

(a) Angiv en ortonormalbasis for U.

(b) Bestem ortogonalprojektionen af

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

på U.

(a) En ortonormalbasis $(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$ fås ved at finde længderne af maplearkets vektorer, nemlig $1, \sqrt{6}, \sqrt{3}$, og derefter at dividere med længderne:

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

(b) Ortogonalprojektionen af $\underline{a}$ på U er ifølge Opskrift 7.3.3 givet som

$$P_U(\underline{a}) = (\underline{a} \cdot \underline{b}_1)\, \underline{b}_1 + (\underline{a} \cdot \underline{b}_2)\, \underline{b}_2 + (\underline{a} \cdot \underline{b}_3)\, \underline{b}_3 = 4\underline{b}_1 + \frac{10}{\sqrt{6}}\underline{b}_2 + \frac{8}{\sqrt{3}}\underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Opgave 5

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Lad $\mathcal{A} = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ være en basis for $\mathbb{R}^3$ og lad $\mathcal{E} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ være den naturlige basis for $\mathbb{R}^3$.

Det oplyses, at

$$_{\mathcal{A}}[\underline{e}_1] = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad _{\mathcal{A}}[\underline{e}_2] = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad _{\mathcal{A}}[\underline{e}_3] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem koordinattransformationsmatricen $_{\mathcal{A}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}}$ og udregn vektorerne $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$.

(b) Om en lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vides, at $\underline{a}_1$ er egenvektor hørende til egenværdien 1, samt at $\underline{a}_2$ og $\underline{a}_3$ begge er egenvektorer hørende til egenværdien 2. Bestem matricen $_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}}$ for f med hensyn til den naturlige basis $\mathcal{E}$.

(*a*) Ifølge definitionen af $_{\mathcal{A}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}}$ er dens søjler de tre givne søjler, altså

$$_{\mathcal{A}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Maplearket giver at

$$_{\mathcal{E}}\mathsf{T}_{\mathcal{A}} = {_{\mathcal{A}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}}^{-1}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

altså

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(*b*) Det er givet, at $f(\underline{a}_1) = \underline{a}_1, f(\underline{a}_2) = 2\underline{a}_2, f(\underline{a}_3) = 2\underline{a}_3$, men dermed har vi

$$_{\mathcal{A}}[f]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Så er

$$_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}} = {_{\mathcal{E}}\mathsf{T}_{\mathcal{A}}}\, {_{\mathcal{A}}[f]_{\mathcal{A}}}\, {_{\mathcal{A}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 2 \\ 10 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

> $with(LinearAlgebra):$

Opgave 4

> $a1 := \langle 0, 1, 0, 0\rangle; a2 := \langle -1, 1, -1, 2\rangle; a3 := \langle 3, 0, 3, -3\rangle;$

$$a1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$a3 := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

> $GramSchmidt([a1, a2, a3]);$

$$\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right] \tag{2}$$

Opgave 5

> $\langle\langle 1, -3, 5\rangle | \langle 1, -2, 3\rangle | \langle 0, 1, -1\rangle | \langle 1, 0, 0\rangle | \langle 0, 1, 0\rangle | \langle 0, 0, 1\rangle\rangle;$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

> $ReducedRowEchelonForm(\%);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

>