LinAlg
Skriftlig prøve
20. januar 2009, 9–12

Dette eksamenssæt løber over 5 sider, denne side inklusive.

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregnere eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt ti underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen.

Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Ved den samlede bedømmelse indregnes, med vægt 30%, et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i kursets forløb.

I løbet af hele eksamen skal eventuelle kommunikationsfaciliteter i lommeregnere og computere være slået fra.

Opgave 1

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt 4×4-matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -4 & -5 & -6 & -9 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Find samtlige løsninger til det lineære ligningssystem

$$\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Lad $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ være den lineære afbildning

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Bestem en basis for $\ker f$. Der skal argumenteres for at de fundne vektorer er lineært uafhængige.

Opgave 2

Betragt matricerne

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}}(x) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & x & 9 & 16 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

(a) Udregn $\det \underline{\underline{A}}$ og vis, at $\det \underline{\underline{B}}(x) = -8 - x$. Ved begge udregninger skal der angives detaljerede mellemregninger.

(b) Bestem mængden af de $x \in \mathbf{R}$ for hvilke $\underline{\underline{B}}(x)\underline{\underline{B}}(x^3)$ ikke er invertibel.

Opgave 3

Betragt den lineære afbildning $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ defineret ved

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 \\ x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem en matrix $\underline{\underline{A}}$ så

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Løs ligningssystemet

$$\underline{\underline{A}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og find dimensionen af billedet $f(\mathbf{R}^3)$.

Opgave 4

Betragt vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

i $\mathbf{R}^4$ og lad $U = \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$.

(a) Vis, at $\dim U = 2$ og bestem en ortonormal basis $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ for U.

(b) Lad

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestem ortogonalprojektionen af $\underline{a}$ på U.

Opgave 5

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt matricen

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem en vektor

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$$

som opfylder $\underline{\underline{B}}\,\underline{a} = \underline{0}$ og $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$.

(b) Bestem en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$ så

$$\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}}^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

> *with*(*LinearAlgebra*) :

Opgave 1

> $A := \langle\langle 0, 1, -4, 1\rangle | \langle 1, 2, -5, 3\rangle | \langle -2, 0, -6, -2\rangle | \langle 1, 3, -9, 4\rangle | \langle 1, 1, -1, 2\rangle\rangle;$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & -5 & -6 & -9 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

> *GaussianElimination*(*A*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Opgave 5

> $B := \langle\langle 5, -3, -1, 0\rangle | \langle -3, 5, -1, 0\rangle | \langle -1, -1, 1, 0\rangle | \langle 0, 0, 0, 4\rangle\rangle;$

$$B := \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{3}$$

> *Eigenvectors*(*B*);

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

>