

LinAlg  
Skriftlig prøve  
20. januar 2009, 9–12  
**Vejledende besvarelse**

Dette eksamenssæt løber over 5 sider, denne side inklusive.

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregner eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt ti underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen.

Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Ved den samlede bedømmelse indregnes, med vægt 30%, et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i kursets forløb.

I løbet af hele eksamen skal eventuelle kommunikationsfaciliteter i lommeregner og computere være slået fra.

En vejledende besvarelse er indført i lilla tekst.

## Opgave 1

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt  $4 \times 4$ -matricen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -4 & -5 & -6 & -9 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Find samtlige løsninger til det lineære ligningssystem

$$\underline{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Lad  $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$  være den lineære afbildning

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Bestem en basis for  $\ker f$ . Der skal argumenteres for at de fundne vektorer er lineært uafhængige.

(a) Af Maplearket ses, at vi kan vælge  $x_3 = s$  og  $x_4 = t$  frit, og vi får derefter følgende ligninger til bestemmelse af  $x_1, x_2$ :

$$x_1 + 2x_2 + 3t = 1, \quad x_2 - 2s + t = 1$$

altså

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4s - t - 1 \\ 2s - t + 1 \\ s \\ t \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbf{R}.$$

(b) Kernen for  $f$  er løsningsmængden til ligningen  $\underline{A}\underline{X} = \underline{0}$ . Maplearket viser, at vi skal løse ligningerne

$$x_1 + 2x_2 + 3t = 0, \quad x_2 - 2s + t = 0,$$

altså

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} -4s - t \\ 2s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbf{R} \right\},$$

hvilket også kan skrives som

$$\ker f = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

De angivne søjler er ikke proportionale f.eks. fordi der står 0,1 på fjerde plads. Dermed er de to søjler lineært uafhængige, og udgør derfor en basis for det underrum de udspænder, dvs for  $\ker f$ .

## Opgave 2

Betragt matricerne

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}}(x) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & x & 9 & 16 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

- (a) Udregn  $\det \underline{\underline{A}}$  og vis, at  $\det \underline{\underline{B}}(x) = -8 - x$ . Ved begge udregninger skal der angives detaljerede mellemregninger.
- (b) Bestem mængden af de  $x \in \mathbf{R}$  for hvilke  $\underline{\underline{B}}(x)\underline{\underline{B}}(x^3)$  ikke er invertibel.

(a) Determinanten af  $\underline{\underline{A}}$  kan f.eks. udregnes ved pilereglen eller ved at udføre to rækkeoperationer:  $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ ,  $R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1$ , hvorved  $\underline{\underline{A}}$  reduceres til

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 12 \end{pmatrix},$$

så

$$\det(\underline{\underline{A}}) = 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} = 12 - 10 = 2.$$

Ved udvikling efter anden søjle finder vi

$$\det \underline{\underline{B}}(x) = (-1)^{1+2} 4 \det \underline{\underline{A}} + (-1)^{4+2} x \det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Den sidste determinant udregnes ved f.eks. ved pilereglen til  $12 + 10 + 18 - 12 - 9 - 20 = -1$  (Ellers ved først at lave et par rækkereduktioner), altså  $\det \underline{\underline{B}}(x) = -8 - x$ .

(b) Idet

$$\det(\underline{\underline{B}}(x)\underline{\underline{B}}(x^3)) = \det \underline{\underline{B}}(x) \det \underline{\underline{B}}(x^3) = (-x - 8)(-x^3 - 8),$$

og idet en matrix ikke er invertibel netop når dens determinant er 0, ser vi, at den angivne matrix ikke er invertibel netop når  $(-x - 8)(-x^3 - 8) = 0$ , altså netop når  $x = -8$  eller  $x^3 = -8$ . Det sidste er det samme som at  $x = -2$ . Den ønskede mængde  $M$  er altså  $M = \{-2, -8\}$ .

**Opgave 3**

Betragt den lineære afbildning  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$  defineret ved

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 \\ x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem en matrix  $\underline{\underline{A}}$  så

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Løs ligningssystemet

$$\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og find dimensionen af billedet  $f(\mathbf{R}^3)$ .

(a) Vi udregner

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

og ifølge søjlereglen er  $f(\underline{e}_j)$  lig med  $j$ 'te søjle i den søgte matrix, altså

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Ved løsning af det anførte ligningssystem ser vi, at  $x_2 = 0$ . Af anden ligning får vi så  $x_1 = 0$ , men så giver første ligning at  $x_3 = 0$ . Dermed passer også den fjerde ligning, så ligningssystemet har kun nulløsningen. Det betyder at  $\ker f = \{0\}$ , og dimensionsætningen giver så  $3 = \dim \ker f + \dim f(\mathbf{R}^3)$ , altså  $\dim f(\mathbf{R}^3) = 3$ .

## Opgave 4

Betragt vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

i  $\mathbf{R}^4$  og lad  $U = \text{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ .

(a) Vis, at  $\dim U = 2$  og bestem en ortonormal basis  $\underline{u}_1, \underline{u}_2$  for  $U$ .

(b) Lad

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestem ortogonalprojektionen af  $\underline{a}$  på  $U$ .

(a) Vi opstiller de 3 søjler i en  $4 \times 3$ -matrix og udfører rækkeoperationer

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hvor vi i første skridt brugte operationerne  $R2 \rightarrow R2 - R1, R3 \rightarrow R3 + R1, R4 \rightarrow R4 - R1$  og i sidste skridt  $R3 \rightarrow R3 - R2$ . Den sidste matrix viser - via uddyndingsalgoritmen - at søjlerne  $\underline{a}_1, \underline{a}_2$  er lineært uafhængige og  $\underline{a}_3$  er en linearkombination af  $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ . Dermed er vist, at  $\dim U = 2$  og  $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$  er en basis for  $U$ . Gram-Schmidt proceduren fortæller, at vi skal sætte  $\underline{b}_1 = \underline{a}_1$  og

$$\underline{b}_2 = \underline{a}_2 - \frac{\underline{a}_2 \cdot \underline{b}_1}{\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_1} \underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dermed er  $(\underline{b}_1, \underline{b}_2)$  en ortogonal basis for  $U$ . Da  $|\underline{b}_1| = 2, |\underline{b}_2| = \sqrt{8}$  får vi en ortonormal basis  $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$  for  $U$  givet ved at dividere med længderne

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Ortogonalprojektionen af  $\underline{a}$  på  $U$  er givet som

$$P_U(\underline{a}) = \underline{a} \cdot \underline{u}_1 \underline{u}_1 + \underline{a} \cdot \underline{u}_2 \underline{u}_2 = \underline{u}_1 - \frac{2}{\sqrt{2}} \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

### Opgave 5

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt matricen

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem en vektor

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$$

som opfylder  $\underline{\underline{B}}\underline{a} = \underline{0}$  og  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ .

(b) Bestem en ortogonal matrix  $\underline{\underline{S}}$  så

$$\underline{\underline{S}}\underline{\underline{B}}\underline{\underline{S}}^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Ifølge Maplearket har  $\underline{\underline{B}}$  egenværdien 0 og egenrummet er udspændt af søjlen

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi skal altså bestemme et tal  $t \in \mathbf{R}$  så

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{2} + t + 0 = 1$$

hvilket giver  $t = \frac{1}{2}$ . Dermed er den søgte vektor  $\underline{a}$  bestemt som

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Fra Maplearket ved vi, at den symmetriske matrix  $\underline{B}$  har egenverdierne 0, 3, 8, 4, og de fire angivne søjler er ortogonale egenvektorer til disse egenverdier i den angivne rækkefølge. Vi skal normalisere disse vektorer og opstille dem i en matrix, idet vi tager dem i samme rækkefølge som diagonalelementerne i den angivne diagonalmatrix i spørgsmålet. Disse fire søjler udgør en ortonormal basis  $\mathcal{A}$  for  $\mathbf{R}^4$  og den tilsvarende matrix er koordinattransformationsmatricen for skift fra denne basis til standardbasis  $\mathcal{E}$ . Vi har altså fundet matricen

$$\varepsilon \mathsf{T}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og vi ved at

$$\mathcal{A} \mathsf{T}_{\mathcal{E}} \underline{B} \varepsilon \mathsf{T}_{\mathcal{A}}$$

er den givne diagonalmatrix. Dermed har vi

$$\underline{S}^t = \varepsilon \mathsf{T}_{\mathcal{A}},$$

så vi finder  $\underline{S}$  ved transponering:

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

```
> with(LinearAlgebra) :
```

**Opgave 1**

```
> A := <<0, 1, -4, 1>|<1, 2, -5, 3>|<-2, 0, -6, -2>|<1, 3, -9, 4>|<1, 1, -1, 2>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & -5 & -6 & -9 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
> GaussianElimination(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

**Opgave 5**

```
> B := <<5, -3, -1, 0>|<-3, 5, -1, 0>|<-1, -1, 1, 0>|<0, 0, 0, 4>>;
```

$$B := \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

```
> Eigenvectors(B);
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

```
>
```