April 2009

Opgave 1

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{1.1.1}$$

with(*LinearAlgebra*) :
GaussianElimination(⟨⟨*A*|10, −1, 11, 12⟩⟩);

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.2}$$

LinearSolve(*GaussianElimination*(⟨⟨*A*|10, −1, 11, 12⟩⟩), *free* = *t*);

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ -4\, t_1 + 9 - 4\, t_4 \\ 5\, t_1 - 8 + 4\, t_4 \\ t_4 \end{bmatrix} \tag{1.1.3}$$

b:
LinearSolve(⟨⟨*A*|0, 0, 0, 0⟩⟩, *free* = *t*);

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\, t_2 - t_4 \\ t_2 \\ -\frac{5}{4}\, t_2 - t_4 \\ t_4 \end{bmatrix} \tag{1.1.4}$$

$v1 := \left\langle -\frac{1}{4}, 1, -\frac{5}{4}, 0 \right\rangle$; $v2 := \langle -1, 0, -1, 1 \rangle$;

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.1.5}$$

Vi tjekker om den givne vektor er en del af spannet af disse vektorer:
$LinearSolve(\langle\langle v1|v2|-12,-12,0,15\rangle\rangle);$

$$\begin{bmatrix} -12 \\ 15 \end{bmatrix} \tag{1.1.6}$$

Dvs.:
$-12\cdot v1 + 15\cdot v2$

$$\begin{bmatrix} -12 \\ -12 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} \tag{1.1.7}$$

Som den anden vektor i basen, kan der vælges en af de to givne.

Opgave 2

detA fås umiddelbart som produktet af diagonalelementerne:
$deta := 3\cdot 3\cdot 4\cdot 4$

$$144 \tag{1.2.1}$$

detB fås ved først at lægge række 1 til alle de andre:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & x \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \end{array}\right]$$

Så udvikles der efter første søjle:

$restart; with(LinearAlgebra):$

$$b2 := \begin{bmatrix} 3 & 4 & x \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & x \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.2)}$$

Og med pilereglen fås så:

$Determinant(b2);$

$$-12 + 12\,x \quad \textbf{(1.2.3)}$$

Spørgsmål b:

det(B(x)*B(2x)) = det(B(x))*det(B(2x)) =

$detbb := (-12 + 12 \cdot x) \cdot (-12 + 24 \cdot x)$

$$(-12 + 12\,x)\;(-12 + 24\,x) \quad \textbf{(1.2.4)}$$

$solve(detbb = deta, x);$

$$0, \frac{3}{2} \quad \textbf{(1.2.5)}$$

Opgave 3

$restart;$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.3.1)}$$

Opgave b:

Først en basis for billedrummet. Dette svarer til spannet af søjlevektorerne i A. Det skal derfor tjekkes hvorvidt disse er lineært afhængige...

$with(LinearAlgebra):$

$GaussianElimination(A);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.3.2)}$$

Søjlerne med trin er lineært uafhængige, hvorfor en basis for billederummet svarer til de to første søjler i A.

Dimensionen af kernen må være 2, da vi starter i R^4 - som har dimension 4, og billedet har dimension 2.

Opgave 4

$restart; with(LinearAlgebra):$
$a1 := \langle 0, 1, -1\rangle; a2 := \langle 1, 2, -3\rangle; \mathrm{a3} := \langle 2, -1, -1\rangle;$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1.4.1}$$

$GaussianElimination(\langle\langle a1|a2|a3\rangle\rangle);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.4.2}$$

Det ses, at a1 og a2 er lineært uafhængige. Dvs. en basis for spannet kan laves alene ud fra to vektorer, hvorfor dimensionen er 2.
En orthonormalbasis findes:
$GramSchmidt([a1, a2], normalized);$

$$\left[\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{6} \end{bmatrix}\right] \tag{1.4.3}$$

Vha. krydsprodukt findes:

$$v3 := CrossProduct\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{6} \end{bmatrix}\right);$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.4.4)}$$

sqrt(*DotProduct*(*v3*, *v3*));

$$1 \quad \textbf{(1.4.5)}$$

Opgave 5

Fra Maplearket ses, at matricen B bl.a. har egenværdi 2. Den tilhørende egenvektor har allerede a1=1. Hvorfor den søgte vektor netop er:
restart; *v2* := ⟨1, -1, 1, 1⟩;

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.5.1)}$$

Da B er symmetrisk og alle egenværdierne har egenmultiplicitet 1, er egenvektorerne allerede orthogonale. De skal dog lige normaliceres. Det ses, at de alle har længden 2. Altså fås:

$o1 := \frac{1}{2} \cdot \langle 1, 1, -1, 1 \rangle;\ o2 := \frac{1}{2} \cdot v2;\ o3 := \frac{1}{2} \cdot \langle -1, 1, 1, 1 \rangle;\ o4 := \frac{1}{2} \cdot \langle -1, -1, -1, 1 \rangle;$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{1.5.2}$$

Det skal bemærkes, at egenværdierne i den ønskede matrix optræder i en anden rækkefølge. Med dette i mente fås:

$St := \langle\langle o3|o4|o2|o1\rangle\rangle;$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{1.5.3}$$

Ved transponering fås da S:

$with(LinearAlgebra) : S := Transpose(St);$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{1.5.4}$$

Tjek:

$$B := \begin{bmatrix} 5 & -4 & -1 & -6 \\ -4 & 5 & 6 & 1 \\ -1 & 6 & 5 & 4 \\ -6 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & -1 & -6 \\ -4 & 5 & 6 & 1 \\ -1 & 6 & 5 & 4 \\ -6 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.5.5)}$$

S.B.Transpose(*S*);

$$\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.5.6)}$$

April 2008

Opgave 1

Først bemærkes det, at de to ligningssystem i a) og b) er ens, hvis r=1. Fra maplearket ses, at ligningsystemet kun har en løsesning, hvis r^2-r=0. Dette passer for r=1. I den rækkereducerede matrix indsættes r=1, og løsningsmængden L findes:

restart; *with*(*LinearAlgebra*) :

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1.1)}$$

$L :=$ *LinearSolve*(*A*, *free* = *t*);

$$\begin{bmatrix} 1 - 3\,t_2 \\ t_2 \\ 1 - 2\,t_4 \\ t_4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1.2)}$$

Opgave b:

Kravet om r^2-r=0 giver:

solve$(r^2 - r = 0, r)$;

$$0, 1 \quad \textbf{(2.1.3)}$$

Dvs. ligningssystemet kun har en løsning hvis r er lig 0 eller 1. Hvis r lig 1, er løsningen som i a).

For=0 fås:

$$L0 := LinearSolve\left(\begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, free = t\right);$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 3\, t_2 \\ t_2 \\ -2\, t_4 \\ t_4 \end{bmatrix} \quad \text{(2.1.4)}$$

Opgave 2

$restart; with(LinearAlgebra):$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(2.2.1)}$$

$Eigenvectors(A);$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(2.2.2)}$$

Egenværdier: 1 (rm=1), 2 (rm=2).

V1 = span(søjle 1)
V2:=span(søjle 2)
Det ses, at dimensionen af V2 (egenmultiplicteten af 2) kun er 1, hvorfor A ikke kan diagonaliseres.

Opgave 3

$restart; with(LinearAlgebra):$

$$C := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}; DD := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

Determinant(*C*); *Determinant*(*DD*);

$$20$$

$$5 \quad (2.3.2)$$

Opgave b:
C.DD; *DD.C*;

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 1 & 6 \\ 9 & 6 & 1 & 4 \\ 8 & 5 & 1 & 5 \\ 11 & 4 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 10 & 4 \\ 6 & 13 & 11 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

At CD ikke er lig DC ville kunne ses allerede ved udregning af første indgang.
det(CD)=det(DC) er altid opfyldt, da det svarer til det(C)*det(D)=det(D)*det(C).

Opgave 4

restart; *with*(*LinearAlgebra*) :
$L := f \rightarrow diff(f, x) + 3 \cdot f;$

$$f \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f + 3 f \quad (2.4.1)$$

En arbitrær vektor i underrummet kan skrives:
$v := \langle a1, a2, a3, a4 \rangle;$

$$\begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a4 \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

Dette svarer til funktionen:
$f := a1 + a2 \cdot x + a3 \cdot \exp(x) + a4 \cdot x \cdot \exp(x);$

$$a1 + a2\,x + a3\,e^x + a4\,x\,e^x \tag{2.4.3}$$

L(f) giver da:
$L(f);$

$$a2 + 4\,a3\,e^x + a4\,e^x + 4\,a4\,x\,e^x + 3\,a1 + 3\,a2\,x \tag{2.4.4}$$

Heraf kan sammenhængen ses, og matricen fås til:

$LM := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix};$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{2.4.5}$$

Test:
$LM.v;$

$$\begin{bmatrix} 3\,a1 + a2 \\ 3\,a2 \\ 4\,a3 + a4 \\ 4\,a4 \end{bmatrix} \tag{2.4.6}$$

Denne vektor er er præcis den fundne funktion givet ved basen.

Opgave b:
Rangen af matricen er 4, da den determinant er forskellig fra 0. Kernen er dermed kun 0-vektoren.

Opgave 5

$x1 := \langle 0, 1, -1, 0 \rangle;\ x2 := \langle 1, 1, 0, 0 \rangle;\ x3 := \langle 0, -1, -2, 1 \rangle;\ x4 := \langle 2, 0, -1, 1 \rangle;$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.1)$$

GaussianElimination(⟨ ⟨*x1*|*x2*|*x3*|*x4*⟩ ⟩);

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.2)$$

Heraf ses, at kun de tre første vektorer er lineært uafhængige. Disse orthonormaliseres:
GramSchmidt([*x1*, *x2*, *x3*], *normalized*);

$$\left[\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right] \quad (2.5.3)$$

$$u1 := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}; u2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix}; u3 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.5.4)}$$

$o := \langle 1, -1, -1, -3 \rangle;$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.5.5)}$$

$DotProduct(o, u1); DotProduct(o, u2); DotProduct(o, u3);$

$$0$$
$$0$$
$$0 \quad \textbf{(2.5.6)}$$

Lad (*) angive et prikprodukt. Da:
o(*)(x1*u1+x2*u2+x3*u3)=x1*o(*)u1+x2*o(*)u2+x3*o(*)u3, hvorfor alle vektorer i U er orthogonale på den givne vektor. Ved normalisering bliver o til:

$u4 := \mathrm{sqrt}(DotProduct(o, o)) \cdot o;$

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} \\ -6\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (2.5.7)$$

Hermed er

$S := \langle\langle u1|u2|u3|u4\rangle\rangle;$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{2} & 2\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{2} & -2\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{2} & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -6\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (2.5.8)$$

en orthogonalmatrix.

April 2007

Opgave 1

Af Maplearket, ses den rækkereducerede matrix. Herfra fås:

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2\cdot I & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2+I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2\,\mathrm{I} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2+\mathrm{I} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

Herfra fås:

$LinearSolve(A2, free = t);$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\,t_1 - \frac{1}{2}\,t_1 \\ -\frac{1}{2}\,t_1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\,t_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.2)$$

Opgave b:

Søjlerummet er spannet af søjlerne. Af Maplearket ses det, at 1., 2. og 4. søjle er lineært uafhængige, hvorfor søjlerummet svarer til spannet af disse. Altså er søjle 1, 2 og 4 i A en basis for søjlerummet.

Af Maplearket ses, at rg af matricen er 3 (antal trin i den søjlereducerede). Dette svarer netop til dimensionen af spannet af søjlerne. Hvorfor dimensionen af søjlerummet er 3. En matrix's transponerede har samme rang, hvorfor også rækkerummet har dimension 3. Matricen af er en 5x4-matrix. Rækkerummet er derfor et underrum af C^4.

Opgave 2

Similær betyder, at matricerne angiver samme afbilledning, men i forskellige basis. Dette må så også betyde, at de har samme egenværdier. I Maplearket ses A's karakteristiske polynominum. Det skal derfor bare tjekkes, at enten B eller C har det samma karakteristiske polynomium.

$restart;\ with(LinearAlgebra):$

$B := \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ C := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.2.1)}$$

$CharacteristicPolynomial(B, \text{lambda});\ CharacteristicPolynomial(C, \text{lambda});$

$$2 + \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda \quad \textbf{(3.2.2)}$$

Heraf ses, at B er similær med A.

Opgave b)
En diagonalmatrix, der er similær med C, fås ved at skrive C vha. egenvektorer. Egenværdierne for C er:

$solve(CharacteristicPolynomial(C, \text{lambda}), \text{lambda});$

$$0, 3, 1 \quad \textbf{(3.2.3)}$$

Da rm=1 for alle egenværdier, kan C diagonaliseres. Og derfor er:

$Cs := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.2.4)}$$

similær med C.

Opgave 3

restart; *with*(*LinearAlgebra*) :
diff (*a1*·exp(*x*) + *a2*·*x*·exp(*x*), *x*);

$$a1\, e^{x} + a2\, e^{x} + a2\, x\, e^{x} \tag{3.3.1}$$

Heraf ses, at matricen er korrekt, da enhver matrix i V kan skrives på formen
a1·exp(*x*) + *a2*·*x*·exp(*x*)

$$a1\, e^{x} + a2\, x\, e^{x} \tag{3.3.2}$$

Opgave b:

$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.3.3}$$

Eigenvectors(*A*);

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.4}$$

Dvs. kun funktioner på formen:
$f := x \rightarrow a1 \cdot \exp(x);$

$$x \rightarrow a1\, e^{x} \tag{3.3.5}$$

Af
diff (*f*(*x*), *x*);

$$a1\, e^{x} \tag{3.3.6}$$

Heraf ses, at vektorer/funktioner på denne form har egenværdi 1.

Opgave 4

$u1 := \langle 1, -1, 0, 0 \rangle;\ u2 := \langle 2, -1, -1, 0 \rangle;\ u3 := \langle 1, 0, 0, -1 \rangle;$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{3.4.1}$$

$GramSchmidt([u1, u2, u3]);$

$$\left[\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{bmatrix} \right] \tag{3.4.2}$$

$v1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; v2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathrm{v3} := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{bmatrix};$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.4.3)}$$

$v4 := \frac{1}{2} \cdot \langle 1, 1, 1, 1 \rangle;$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.4.4)}$$

$DotProduct(v1, v4); DotProduct(v2, v4); DotProduct(v3, v4);$

$$0$$
$$0$$
$$0 \quad \textbf{(3.4.5)}$$

Heraf ses, at de er orthogonale. Koordinattransformationsmatricen fra basen D til E er:
$ETD := \langle \langle v1 | v2 | v3 | v4 \rangle \rangle;$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.4.6)}$$

Herfra fås:
$DTE := MatrixInverse(ETD);$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.4.7}$$

Opgave 5

restart; *with*(*LinearAlgebra*) :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & s & 2 & 0 \\ -s & 2 & r^2 & s \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & s & 2 & 0 \\ -s & 2 & r^2 & s \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.5.1}$$

Determinant(*A*);

$$2 + 2 r^2 \tag{3.5.2}$$

Heraf ses, at det(A)>0 for alle r og s. Dvs., at A er invertibel for alle r og s.

April 2006

Opgave 1

Fra maplearket ses den trappereducerede løsning. Herfra fås for ved b1=b2=b3=0:

$$B0 := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.1}$$

LinearSolve(*B0*, *free* = *t*);

$$\begin{bmatrix} -5\, t_4 \\ t_2 \\ 2\, t_2 + 7\, t_4 - t_5 \\ t_4 \\ t_5 \end{bmatrix} \tag{4.1.2}$$

For b1=b2=b3=1 ses, at ligningssytemet ikke har nogen løsninger, da der så er trin i den sidste søjle.

Opgave b:
Først skal det tjekkes for hvilket b, ligningsystemet overhovedet har en løsning.
$solve(b-2*1-2, b);$

$$4 \tag{4.1.3}$$

For at der ikke skal være trin i sidste søjle, skal b=4.
For b=4 er der uendelig mange løsninger, og løsningsrummet vil have dimension 3, svarende til antal søjler uden trin i den trappereducerede.

Opgave 2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & -i & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & -I & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3+I & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 3+I & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -I & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 3+I & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -I & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & -2 & -1+3\,I & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -I & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\,I & 3+I & -I \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1-2I & -3-2I & I \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2I & 3+I & -I \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1-2I & -3-2I & I \\ 0 & 1 & 0 & 2I & 3 & -I \\ 0 & 0 & 1 & 2I & 3+I & -I \end{array}\right]$$

Heraf ses den inverse.

Opgave 3

restart; *with*(*LinearAlgebra*) :
u1 := ⟨1, 0, 1⟩; *u2* := ⟨2, 1, 3⟩;

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{4.3.1}$$

GramSchmidt([*u1*, *u2*], *normalized*);

$$\left[\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \end{bmatrix}\right] \tag{4.3.2}$$

$$v1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}; v2 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

$u3 := \langle -1, -1, 1 \rangle;$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

$v3 := \frac{1}{\mathrm{sqrt}(3)} \cdot u3;$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (4.3.5)$$

En orthonormalbasis er altså:
$v1, v2, v3;$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (4.3.6)$$

Opgave b:
$S := \langle \langle v1 | v2 | v3 \rangle \rangle;$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

$$DD := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.3.8)}$$

$K := \langle\langle u1|u2|u3\rangle\rangle;$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.3.9)}$$

$\mathrm{A} := K.\mathrm{DD}.\mathrm{K}^{-1};$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.3.10)}$$

Denne kunne også være fundet ved:
$S := \langle\langle v1|v2|v3\rangle\rangle;$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.3.11)}$$

$S.DD.Transpose(S);$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.3.12)}$$

Det ses, at A er symmetrisk, som den burde være, da kan diagonaliseres ved en orthonormalmatrix.

Opgave 4

Udvidelsesalgoritmen ses i maplearket. De søjler med trin i den rækkereducerede matrix angiver hvilke søjler i den oprindelige matrix, vi skal bruge. Derfor udvider vi med:
$e1 := UnitVector(1, 5); e4 := UnitVector(4, 5);$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.4.1}$$

Matricen aflæses med søjlereglen til:

$T := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.4.2}$$

$v1 := \langle 1, 0, 1, 0, 0 \rangle; v2 := \langle 0, -1, -1, 0, 0 \rangle; v3 := \langle 0, 0, 0, -1, 1 \rangle; v4 := e1; v5 := e4;$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.4.3}$$

$ETB := \langle \langle v1 | v2 | v3 | v4 | v5 \rangle \rangle;$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.4.4}$$

Altså fås

$T.ETB;$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.4.5}$$

Dimensionen af kernen er 3. Da dimensionen af billedet 2, og rummet 5.

Opgave 5

Det ses hurtigt, at detA=0, detB=1. For C og D fås:

$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.5.1}$$

$Determinant(C);$

$$0 \tag{4.5.2}$$

$DD := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.5.3)}$$

Determinant(*DD*);

$$-1 \quad \textbf{(4.5.4)}$$

Opgave b)

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.5.5)}$$

CharacteristicPolynomial(*A*, lambda);

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda \quad \textbf{(4.5.6)}$$

solve(%=0, lambda);

$$0, 1, 1 \quad \textbf{(4.5.7)}$$

Kun V_1-rummet kan forvolde problemer. Derfor tjekkes:
GaussianElimination(*A* − *IdentityMatrix*(3));

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.5.8)}$$

Heraf ses, at egenmultipliciteten er 1, men rodmultipliciteten var 2, hvorfor A ikke kan diagonaliseres.

April 2005

Opgave 1

restart; *with*(*LinearAlgebra*) :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ I & 1 + 2 \cdot I & 2 & 0 \\ 1 & 0 & I & 1 \\ 2 - I & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ I & 1+2\,I & 2 & 0 \\ 1 & 0 & I & 1 \\ 2-I & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.1.1)}$$

$Determinant(A);$

$$1-4\,I \quad \textbf{(5.1.2)}$$

Dette kan i hånden udregnes ved først at minuse række 1 fra række 3 - og derefter udvikle efter række 3.

Opgave 2

Ikke pensum.

Opgave 3

Fra maplearket ses, at den trappereducerede matrix har 3 trin, hvorfor rg(f)=3. Dermed er kernen 1.

Opgave b)
På maplearket ses ligningssystemet løst netop for vektoren (x,y,z,w). Det ses, at dette punkt kun kan nås gennem funktionen, hvis:
$w+x-z+2\cdot y=0;$

$$w+x-z+2\,y=0 \quad \textbf{(5.3.1)}$$

Er dette opfyldt, vil systemet kunne løses, hvorfor netop dette er kravet.

Opgave 4

Det oplyses, at en n x n-matrix har egenskaben A^2=A. Derefter defineres B=E-A.
restart;
Opgave a)
$BA=(E-A)A=EA - AA=A - A=0;$
B^2 = (E-A)(E-A) = E^2 + A^2 - AE - EA = E + A - 2A = E - A = B

Opgave b)
Lad B være invertibel. Så fås:
E = BB^-1 = (BB)B^-1 = BE = B

Opgave 5

Matricen ses på maplearket som et matrixprodukt mellem tre matricer, hvoraf den midterste er en diagonalmatrix. Altså kan alle informationer beregnes ud fra disse matricer.

Egenværdierne ses som diagonalindgangene i diagonalmatricen. Altså:
1, 3, 2, 2 ,3. Egenvektorerne kan aflæses som søjlerne i S^-1. Disse danner basis for egenrummene. F.eks. er en basis for V2:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} \frac{13}{3} \\ -\frac{13}{3} \\ -\frac{23}{3} \\ -\frac{19}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{array}\right];$$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} \frac{13}{3} \\ -\frac{13}{3} \\ -\frac{23}{3} \\ -\frac{19}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{array}\right] \tag{5.5.1}$$

Bemærk: Når der bruges LinearSolve har Maple det med, at indføre frie parametre for andre variable end dem uden trin. Derfor, løsningingerne er ikke nødvendigvis præcis dem man får ved at lave det i hånden, men vektorerne er proportionale med disse...