Prøv-dig-selv 7.

Fra eksamen i Algebra 1, juni 2008:
Ved besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $2008 = 2^3 \cdot 251$, og at 251 er et primtal.

1. (S08, opg 12) Betragt polynomiet $f = X^k - a \in L[X]$, hvor L er et legeme, $k \geqslant 1$, og $a \neq 0$. Antag, at $\alpha \in L$ er rod i f. Vis, at $\beta \in L$ er rod i f, hvis og kun hvis $\beta\alpha^{-1}$ er rod i $X^k - 1$.

2. (S08, opg 13) Hvor mange komplekse rødder har polynomiet $f = X^{2008} - 5$? Hvor mange af dem er reelle?

I de næste to spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^{2008} - 5 \in \mathbb{F}_{251}[X]$, idet koefficienterne identificeres med deres restklasser modulo 251.

3. (S08, opg 14) Vis, at restklassen af 2 modulo 251 er rod i f.

4. (S08, opg 15) Hvor mange rødder har f i $\mathbb{F}_{251}$? [Det må uden bevis benyttes, at i en cyklisk gruppe C af orden n (multiplikativt skrevet, med neutralt element 1) er antallet af løsninger til ligningen $x^k = 1$ med $x \in C$ lig med den største fælles divisor for n, k.]

Ved eksamen kan det betale sig at holde hovedet koldt. Sommetider er en opgavetekst indviklet, og den indeholder måske nogen ord, du afskyr. Men det kan ofte betale sig ikke bare at springe opgaveteksten over; prøv at forstå, hvad opgaven går ud på; måske er den mindre indviklet end du tror. Og husk, selv om du ikke kan regne en opgave, må du gerne benytte dens resultater i andre opgaver.