

Session 9-10.

Program. Den sjette uge har overskriften „Sylows sætninger“ på basis af GRP8, men jeg når nok også at definere, hvad en ring er. Øvelserne: Tirsdag T26/5 er det GRP5: 31, 32; GRP6: 6, 12*; GRP7: 14; GRP8: 1.

Og fredag F29/5 er det GRP8: 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12.

Bemærk. Pensum er fastlagt (se hjemmesiden). Det afviger fra pensum sidste år ved at SYM nu er udgået af pensum.

Nøgleord: p -gruppe, Baneformlen, Klasseformlen, konjugering, centrum, centralisator, konjugerede permutationer, Burnside's Formel, Polya's Formel, farvelægning, mønstre, Hexaedergruppen, Sylow- p -undergruppe.

Kommentar. Sylows sætninger er nogle fundamentale resultater om undergrupper i en endelig gruppe G . De anvendes bl.a. til at klassificere endelige grupper. Kapitel GRP8 er kursorisk, så ved eksamen kræves ikke kendskab til beviserne (men der kræves kendskab til anvendelserne).

Antag, at G har orden n , og betragt en primopløsning $n = \cdots p^v \cdots$. En Sylow- p -undergruppe af G (hvor p altså er en primdivisor i n) er en undergruppe af orden p^v . Sylows sætninger siger lidt løst, at sådan nogen findes og at der er nogle begrænsninger på antallet af dem.

En gruppe $G \neq \{e\}$ er *simpel*, hvis de eneste normale undergrupper i G er de to trivielle. Fx er den cykliske gruppe C_p af primtalsorden p en simpel gruppe.

Lad N være en normal undergruppe i G (herfor skrives ofte $N \triangleleft G$), og lad $Q := G/N$ være kvotientgruppen. Gruppen G kan da opfattes som „sammenklistret“ af grupperne N og Q i følgende forstand: Elementerne q i Q er sideklasser modulo N , så for hvert $q \in Q$ kan vi tænke os valgt en repræsentant $s_q \in G$. Herefter er G den disjunkte forening af sideklasserne $s_q N$, og hvert element $g \in G$ kan altså skrive $g = s_q n$, med entydigt bestemte $q \in Q, n \in N$. Som mængde kan vi altså identificere: $G = Q \times N$. Sammenklistringen består i hvordan multiplikationen i G er bestemt ud fra multiplikationen i N og i Q . Hvis G ikke er simpel, har G en ikke-triviel normal undergruppe N , og G kan „nedbrydes“ til N og Q som begge har mindre orden end G . Hvis N og/eller Q ikke er simple kan de yderligere nedbrydes. I denne løse forstand er de simple grupper dem, der ikke kan nedbrydes yderligere, og de er byggestenene for alle grupper: en endelig gruppe G kan opfattes som opbygget af simple grupper. Lidt mere præcist: Der findes en „kæde“ af normale undergrupper,

$$\{1\} = N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft N_2 \triangleleft \cdots \triangleleft N_r = G,$$

hvor de successive kvotienter N_i/N_{i-1} er simple grupper. For de symmetriske grupper S_n for $n = 2, 3, 4$ får vi kæderne,

$$\underbrace{\{1\} \triangleleft S_2}_{C_2}, \quad \underbrace{\{1\} \triangleleft A_3 \triangleleft S_3}_{C_3 \quad C_2}, \quad \underbrace{\{1\} \triangleleft C_2 \triangleleft V \triangleleft A_4 \triangleleft S_4}_{C_2 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_2},$$

hvor de successive kvotienter, som antydnet, er cykliske af ordener 2 og 3. Det er faktisk eksistensen af disse kæder, hvis successive kvotienter er cykliske grupper, der sikrer, at rødderne i polynomier af grad $n = 2, 3, 4$ kan udtrykkes ved kvadrat- og kubikrødder af

23. maj 2009

udtryk i polynomiets koefficienter. Det er dybtliggende, at det tilsvarende resultat *ikke* gælder for polynomier af grad $n \geq 5$ (Abel's sætning); det bygger afgørende på, at A_n så er en simpel gruppe.

Kuglerne.

• *En p -gruppe*, dvs en gruppe hvis orden er en potens p^n ($n \geq 1$) af et primtal p , har ikke trivielt centrum.

• *Burnside's formel.* $\#(\text{baner}) = |X/G| = |G|^{-1} \sum_g |X^g|$.

• *Polya's Formel.* Antag, at G virker på mængden X (af pladser), og at der er givet en mængde F (af farver). Så virker G også på mængden $\mathcal{F} = F^X$ af afbildninger $X \rightarrow F$ (farvelægninger af X), og banerne er *mønstrene*. Mængden af mønstre kan tælles:

$$\# \text{mønstre} = |\mathcal{F}/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F|^{\# \text{cykler for } \rho_g}.$$

Der er et led i summen for hvert $g \in G$. Til virkningen af G på X hører for hvert $g \in G$ en permutation ρ_g af X , og eksponenten på $|F|$ er antallet af cykler (1-cykler medregnet) for permutationen ρ_g .

• *Hexaedergruppen* Kapitlet om symmetrier hører ikke med til pensum, men man skal vide lidt om symmetrigruppen H for en terning (et hexaeder): Der er 24 drejninger i rummet, der fører terningen over i sig selv, nemlig identiteten (1 stk), drejninger på $\pm 2\pi/3$ omkring en hjørneakse (8 stk), drejninger på $2\pi/2$ omkring en kantakse (6 stk), drejninger på $\pm 2\pi/4$ omkring en sideakse (6 stk), og drejninger på $2\pi/2$ omkring en sideakse (3 stk). Gruppen H^* er isomorf med S_4 : enhver symmetri af terningen permuterer de 4 hjørneakser, og den herved bestemte homomorfi $H \rightarrow S_4$ er en isomorfi.

• *Sylow- p -undergrupper af G* , hvor p er et primtal, er undergrupper hvis orden er den største mulige potens af p , der går op i ordenen af G .

• *Sylow's sætninger.* Lad Syl_p være mængden af Sylow- p -undergrupper af en given gruppe G . Da gælder: (1) $Syl_p \neq \emptyset$. (2) Hvis $S', S \in Syl_p$, så findes $g \in G$ så $S' = gSg^{-1}$. (3) Antallet $|Syl_p|$ er $\equiv 1 \pmod{p}$ og divisor i $|G|$. (4) $|Syl_p| = 1$, hvis og kun hvis en af Sylow- p -undergrupperne er normal.

Påstand (4) er en let konsekvens af de øvrige.

Hvornår var det nu det var? Niels Henrik Abel 1802–1829, William Burnside 1852–1927, George Pólya 1887–1985, Peter Ludwig Mejdell Sylow 1832–1918.

På sigt: Den syvende uge har overskriften „Ring, polynomier, rødder“, på basis af RNG1 og POL1-2. Der er kun undervisning tirsdag T2/6; øvelserne er GRP7: **8**; GRP8: skrf6, 9, 11, 13, 15*, 16; RNG1: 1, 2, 5.

Husk, at der også er en ottende uge!

Anders Thorup