

Session 7-8.

Undervisning tirsdag T19/5 og fredag F22/5 med overskrifterne „Gruppevirkning“ og „Sylogrupper“. Jeg fortæller også lidt om rummets symmetrier, men bogens kapitel om symmetrier hører ikke med til pensum.

Øvelserne: Om tirsdagen, T19/5, er det GRP5: 21; GRP7: **9**, **16**, 17, 18, 21, 22 og om fredagen, F22/5, er det **OBL**; GRP5: 26, 29; GRP7: 23, 24*, 26, 27.

Nøgleord: Virkning af gruppe G på mængde X , repræsentation $G \rightarrow \text{Perm}(X)$, triviel virkning, invariant (eller stabil) delmængde, restriktion af virkning, virkning på $\mathcal{P}(X)$, virkning på $\mathcal{F} = F^X$, translation, Cayley's Sætning, G -ækvivalens, bane $G.x$, banelængde, banerum X/G , fixpunktsmængde X^g for g , isotropigruppe G_x for x , fixpunktsmængde X^G for virkning, Baneformlen, konjugering, konjugeretklasse, centrum, centralisator, konjugerede permutationer.

Kommentar. Whops!, – så var der fortvivlende mange nøgleord.

Baneformlen er en „beregningsformel“ for længden af en bane: $|G.x| = |G:G_x| = |G|/|G_x|$ (det sidste lighedstegn følger af Lagrange). Det følger specielt, at længden af en bane er divisor i gruppens orden.

Tælleformlen tæller antallet af elementer i X ved at tælle antallet af elementer i de enkelte baner, og så udregne summen af disse antal. Et-punktsbanerne, dvs baner der kun består af et enkelt punkt, svarer til fixpunkterne, så hvert fixpunkt bidrager med et 1-tal til summen. Antallet af 1-taller er så $|X^G|$. Hver af de øvrige baner bidrager med et ental, der er større end 1 og divisor i $|G|$. Denne observation er essentielt tælleformlen.

Det er vigtigt at forstå anvendelsen af gruppevirkninger på mønstre: Her fortolkes X som en mængde af pladser. For en given mængde F (af farver) fortolkes afbildninger $\varphi: X \rightarrow F$ som *farvninger eller farvelægninger* af X , idet værdien $\varphi(x) \in F$ fortæller, hvilken farve der er lagt på pladsen x . Gruppen G virker på mængden F^X af farvelægninger, idet $g.\varphi$ er den farvelægning, der bestemmes ved, at farven på pladsen x flyttes hen på pladsen $g.x$, altså ved ligningen $(g.\varphi)(g.x) = \varphi(x)$. Banerne, der også kaldes *mønstre*, består af farvninger, der i en vis forstand er „ens“. Det er vigtigt at kunne bestemme antallet af farvninger, der er invariante under et givet gruppeelement g .

Fx kan X være de 64 pladser i en 8×8 matrix (et skakbræt) og $F = \{\square, \blacksquare\}$ kan være mængden med to farver. En afbildning $\varphi: X \rightarrow F$ fortæller hvilke af de to farver, der er lagt på hver af de 64 felter. Gruppen, der virker på skakbrættets felter, kan naturligt være Diedergruppen D_4 af orden 8. Et skakbræt-mønster er herefter en *bane* af ækvivalente farvelægninger, og antallet af baner er antallet af forskellige mønstre på skakbrættet. Antag fx, at g er spejlingen i en given diagonal. En farvelægning invariant under g kan have vilkårlige farver på de 8 felter i diagonalen, men hvert af de $(64 - 8)/2 = 28$ felter over diagonalen skal have samme farve som sit spejlbillede under diagonalen. Der er derfor ialt $2^{8+28} = 2^{36}$ farvelægninger invariante under g .

Kommentar. Ortogonale afbildninger spiller en vigtig rolle i planens og rummets geometri. De indgår i flytninger, og dermed i symmetrigrupperne for de ting, der omgiver os. SYM1 indeholder beskrivelsen af den ortogonale gruppe $O(n) = O_n(\mathbb{R})$ og den *specielle ortogonale*

gruppe $O^+(n) = SO(n) = SO_n(\mathbb{R})$. Matricerne i $SO(n)$ har determinant 1; det er de *orienteringsbevarende flytninger*. Ortogonale afbildninger er i princippet kendt, og kapitlet om symmetrier indgår ikke i pensum. Men lidt skal man nu vide:

Gruppen $O(2)$, bestående af ortogonale (2×2) -matricer, beskriver de flytninger af planen, der holder origo fast. Med determinant $= -1$ er det spejlinger i linier, og med determinant $= 1$ er det drejningerne. Du skal også kende hovedresultatet for $n = 3$:

De ortogonale, orienteringsbevarende afbildninger $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er netop drejningerne omkring akser (linier) gennem origo.

Det er klart, at de beskrevne afbildninger er ortogonale (dvs lineære og afstandsbevarende), men det er slet ikke klart, at der ikke kan være andre. Hvis man fx i \mathbb{R}^3 først drejer en vinkel v omkring én akse, og derefter en vinkel w omkring en anden akse, så er resultatet selvfølgelig en ortogonal afbildning, og dermed, ifølge hovedresultatet, en drejning omkring en (tredie) akse; det er da ikke så oplagt, vel?

Kuglerne.

- *Cayley's Sætning.* For et givet g i en given gruppe G er venstre-multiplikation med g , dvs afbildningen $\rho_g: x \mapsto gx$ for $x \in G$, en permutation af G , og $g \mapsto \rho_g$ er en injektiv homomorfi af G ind i $\text{Perm}(G)$. Lidt kort: G kan opfattes som en gruppe af permutationer, nemlig som en undergruppe af $\text{Perm}(G)$.

- *Baner.* Til en virkning af G på X hører *banerne*, som er delmængder af X af formen,

$$G.x = \{ g.x \mid g \in G \};$$

de udgør en klassesdeling svarende til G -ækvivalens, defineret ved

$$x' \sim x \iff \exists g \in G : x' = g.x.$$

Mængden af baner er *banerummet*, betegnet X/G .

- *Fixpunkt.* Ligningen

$$g.x = x$$

fortæller, at x er *fixpunkt* for g og at g *fixerer* x . *Isotropigruppen* G_x består af de $g \in G$ der fixerer x , og X^g er mængden af fixpunkter for g . Med X^G betegnes delmængden af X bestående af de elementer, der er *fixpunkter for virkningen* af G , dvs fixpunkter for alle g .

- *Baneformlen* er ligheden $|G:G_x| = |G.x|$ mellem index af isotropigruppen og længden af banen. Den kommer fra den bijektive afbildning $G/G_x \xrightarrow{\sim} G.x$. Isotropigruppen G_x kaldes i øvrigt også *stabilisatorgruppen* for x .

- *Konjugering* er virkningen af G på sig selv ($X := G$), bestemt ved ${}^g x := gxg^{-1}$. Her er $x \in G$ fixpunkt for $g \in G$ præcis når $gx = xg$, dvs når g og x kommuterer. Isotropigruppen for x er *centralisatoren* $C(x)$. Banerne er *konjugeretklasserne*. For $G = S_n$ er det typerne: to permutationer er konjugerede, hvis og kun hvis de har samme type.

På sigt: Den sjette uge, T26/5 og F29/5 er det essentielt „Sylows sætninger“, fra GRP8.

Øvelser tirsdag, T26/5, er følgende: GRP5: 31, 32; GRP6: 6, 12*; GRP7: **14**; GRP8: 1, og fredag F29/5 er det: GRP8: 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12.