

### Session 4.

**Program.** I den tredje uge er overskriften: „Struktursætning“; jeg må jo også nævne den fundamentale „Isomorfisætning“, som jeg ikke nåede i sidste uge. (og måske begyndelsen af „Gruppenvirkning“, fordi vi er bagud i forhold til øvelsesopgaverne). Og – der er igen ingen undervisning fredag.

Øvelserne tirsdag T5/5 er GRP5: 6\*, 7, 9, 10, 13, 15, 18, 22, 23, 24; GRP6: 6; og tirsdagen slutter som sædvanlig med en „prøv-dig-selv“ session.

**Nøgleord:** Orden af  $gh$ , produkt af grupper, Højre- og venstre-sideklasse, normal undergruppe, kvotientgruppe, homomorfi, isomorfi.

**Kommentar.** Struktursætningen siger „alt“ om endelige kommutative grupper: Hvis du bliver udfordret med en endelig kommutativ gruppe, kan du med ganske få spørgsmål afgøre hvilken gruppe, det drejer sig om. Du kender et tilsvarende resultat for endeligdimensionale vektorrum: Her behøver du kun et spørgsmål: hvilken dimension har vektorrummet? For grupper er det lidt mere kompliceret: Gruppen er et produkt af endelige cykliske grupper af primtalsorden, og den fremstilling er entydig. Derfor skal du først spørge om, hvilken orden gruppen har. Og når du kender ordenen  $n$ , skal du primopløse  $n$ , og så for hver primfaktor  $p$  i  $n$  spørge om . . . ; ja, hvilke spørgsmål vil du egentlig stille?

Og hvilke grupper vil du anvende struktursætningen på? Det er ikke særlig interessant at anvende sætningen på grupper, du i forvejen kender strukturen af. Men der er andre: fx er den multiplikative gruppe  $(\mathbb{Z}/n)^*$  et oplagt eksempel, hvor man simpelthen får lyst til at anvende struktursætningen.

Husk, at GRP6 om struktursætningen er kursorisk: ved eksamen forudsættes kun kendskab til begreber og resultater (og til eksempler), men ikke til beviserne. Men det er værd at vide, at en vigtig ingrediens i beviset er *maksimal elementorden*. Et vigtigt resultat for endelige *abelske* grupper er følgende: *Den maksimale elementorden er divisor i gruppens orden.*

#### Kuglerne.

- *De trivielle er normale.* Index = 2 er normalt. I en kommutativ gruppe er alt normalt. Hvad betyder de mystiske påstande?
- *En injektiv homomorfi* er karakteriseret ved sin trivielle kerne:  $\varphi: G \rightarrow G'$  er injektiv, hvis og kun hvis  $\varphi^{-1}(e') = \{e\}$ .
- *Isomorfisætning.* Homomorfi  $\varphi: G \rightarrow G'$  giver isomorfi  $G/\varphi^{-1}(e') \xrightarrow{\sim} \varphi(G)$ .
- *Korollar til Isomorfisætning.* For en gruppehomomorfi  $\varphi: G \rightarrow G'$  er ordenen af billedgruppen lig med index af kernen:  $|\varphi(G)| = |G : \varphi^{-1}(e')|$

**På sigt.** Næste uge er overskriften „Gruppenvirkning“, både tirsdag og fredag. Ugens øvelser tirsdag, T12/5, er GRP5: 25, 27, 28; GRP6: 4, 10\*, 11, 13; GRP7: 1, 2, 3, 4. Om fredagen, F15/5, er det GRP6: 14\*; GRP7: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 15.

Anders Thorup