Obligatorisk opgave i Algebra 1, 2009

Afleveres senest fredag den 22/5 kl. 10.00. Se yderligere information om afleveringen på næste side.

1. Om en permutation $\sigma \in \mathrm{S}_8$ vides, at $\sigma^3 = (1\,2\,3\,4\,5)$ og at $\sigma^5 = (6\,7\,8)$. Bestem σ. Vis, at σ er lige, og bestem index af $\langle\sigma\rangle$ i A_8.

2. I en kommutativ gruppe af orden 1000 findes 4 elementer af orden 10. Vis, at gruppen er cyklisk. Angiv en kommutativ gruppe af orden 1000, der har 72 elementer af orden 10.

3. Bestem antallet af abelske grupper af orden 6075 (op til isomorfi).

4. Lad $\varphi\colon G \to G'$ være en gruppehomomorfi. Antag, at G er cyklisk. Vis, at billedgruppen $\varphi(G)$ er cyklisk.

5. Lad $\varphi\colon \mathrm{C}_{28} \to \mathrm{A}_5$ være en ikke-triviel homomorfi, og lad d være ordenen af billedet. Vis, at $d \mid 28$. Vis, at $7 \nmid d$. Vis, at $d \neq 4$. Begrund, at $d = 2$. Vis, at der er 15 ikke-trivielle homomorfier $\mathrm{C}_{28} \to \mathrm{A}_5$.

6. Betragt 5-cyklen $\sigma = (2\,3\,4\,5\,6)$ som permutation i S_6. Bestem antallet af permutationer i S_6 som er konjugerede med σ. Angiv dernæst permutationerne i centralisatoren for σ.

7. Vis, at Klein's Vierer-gruppe V er isomorf med en undergruppe af diedergruppen D_n, hvis og kun hvis n er lige.

8. Betragt nedenstående 6 grupper:

$$G_1 := \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_{10} \times \mathrm{C}_{100}, \quad G_2 := \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_{125}, \quad G_3 := \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_{100},$$
$$G_4 := \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_{10} \times \mathrm{C}_{50}, \quad G_5 := \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_{20} \times \mathrm{C}_{25}, \quad G_6 := \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_{500}\,.$$

Bestem de par (i, j) med $i < j$ for hvilke grupperne G_i og G_j er isomorfe.

9. Gruppen S_4 virker på talrummet $\mathbb{R}^4$ ved, for vektorer $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, at permutere de 4 koordinater. Bestem isotropigruppen for vektoren $x = (0, 1, 0, 1)$, og bestem banen gennem x. Angiv en vektor, hvis isotropigruppe har orden 2.

10. Hvor mange perlekæder med 8 perler kan der laves, når der er to farver perler at vælge imellem?

11. Hvor mange karusseller med 8 heste kan der laves, når der er to farver (træ-)heste at vælge imellem?

12. Vis, at der kun findes én homomorfi $\mathrm{A}_4 \to \mathrm{C}_2$.

13. Lad G være en endelig abelsk gruppe og lad $\varphi\colon G \to G$ være en homomorfi. Vis, at hvis G er cyklisk, så gælder $\varphi^{-1}(e) \simeq G/\varphi(G)$.

14. Lad $\varphi\colon \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/8 \to \mathbb{Z}/4$ være en surjektiv gruppehomomorfi. Vis, at kernen, som kommutativ gruppe, er isomorf med $\mathbb{Z}/4$ eller $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Vis, at begge muligheder kan forekomme (med passende valg af φ).

15. Antag, at $d \mid n$. Vis, at $[a]_n \mapsto [a]_d$ er en veldefineret homomorfi $(\mathbb{Z}/n)^* \to (\mathbb{Z}/d)^*$. Vis, at homomorfien er surjektiv, hvis n er en primtalspotens. Vis, at homomorfien er surjektiv for alle naturlige tal n. Hvor mange primiske restklasser $[a]_{2000}$ modulo 2000 opfylder, at $a \equiv 1 \pmod 5$?

Om den obligatoriske opgave i Algebra 1, 2009.

Omstående opgave er den obligatoriske opgave i kurset Algebra 1, 2009. Godkendelse af denne opgave kræves for at man kan gå til eksamen i Algebra 1.

Som nævnt nedenfor *skal besvarelsen være individuel*. Det betyder, at hver enkelt student selvstændigt skal udforme sin besvarelse. Det præciseres her på Algebra 1 sådan: Du må gerne diskutere opgaverne med andre, og gerne ved en tavle eller et stykke papir; men du må under ingen omstændigheder skrive af – eller kopiere – hvad andre har skrevet i relation til opgaverne, og du må ikke kigge på andres besvarelser, medens du udformer din egen.

Her er en række yderligere informationer om den obligatoriske opgave:

- Besvarelsen skal afleveres senest fredag den 22/5 kl 10.00. Hvis man går på et øvelseshold, afleveres til holdets instruktor. Det er en betingelse, at man er registreret på holdet i UA-systemet. Hvis man ikke går til øvelser, træffes aftale om registrering med forelæseren.
- Alle 15 spørgsmål skal være besvaret for at opgaven kan godkendes.
- Besvarelsen skal være individuel.
- Besvarelsen skal afleveres på papir.
- Fra sin „profil“ kan man se „Bedømmelser fra UA“. Her kan man løbende følge med i sin opgaves status. Man kan komme til sin profil fra en vilkårlig SISk-hjemmeside; prøv eventuelt med linket `https://www.isis.ku.dk/myprofile/`.
- Besvarelserne er bedømt senest tirsdag den 26/5 ved øvelsernes begyndelse.
- Hvis man ikke får godkendt sin besvarelse, vil der være mulighed for at *genaflevere* efter følgende procedure:
  - Genaflevering senest kl 10.00 til instruktoren ved øvelserne fredag den 29/5.
  - Bedømmelsen foreligger senest ved øvelserne tirsdag den 2/6.
  - Eventuelle problemer herefter afklares med Anders Thorup.