

Facit09 uden garanti!**Juni 2009**

1. $\sigma_2 = (1\ 2\ 4\ 8\ 5\ 10\ 9\ 7\ 3\ 6)(11)$.
2. FEJL I OPGAVERN
3. #10-cykler er $11 \cdot 9!$, så $|C(\sigma_2)| = 11!/(11 \cdot 9!) = 10$.
4. Hvis n er ordenen af g , så er $g^n = 1$, hvoraf $\varphi(g)^n = 1$, hvoraf $k \mid n$.
5. Ordenen er divisor i 6, og da $3^2 \equiv 2 \not\equiv 1$ og $3^3 \equiv -1 \not\equiv 1$ er ordenen = 6. $(\mathbb{Z}/49)^*$ har orden $\varphi(49) = 6 \cdot 7 = 42$. Ordenen af 3 modulo 49 er divisor i $7 \cdot 6$, og ifølge foregående opgave et multiplum af 6. Den er ikke 6, idet $3^6 = 81 \cdot 3^2 \equiv (-17) \cdot 3 \cdot 3 \equiv -6 \not\equiv 1$. Altså er den $7 \cdot 6 = 42$.
6. $(\mathbb{Z}/2009)^* = (\mathbb{Z}/49)^* \times (\mathbb{Z}/41)^*$. Orden: $\varphi(2009) = \varphi(49) \cdot \varphi(41) = 42 \cdot 40 = 1.680$. $(\mathbb{Z}/49)^*$ er cyklisk af orden 42 (forrige opgave) og $(\mathbb{Z}/41)^*$ er cyklisk af orden 40 (ifølge ...), så maksimale elementorden er mindste fælles multiplum af 42 og 40, dvs $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
Modulo 41 er $3^4 = 81 \equiv -1$, så 3 har orden 8. Modulo 49 har 3 orden 42. Modulo 2009 er ordenen af 3 det mindste fælles multiplum af 8 og 42, dvs $= 2^3 \cdot 3 \cdot 7$.
7. Antallet er 2, nemlig $C_{49} \times C_{41}$ og $C_7 \times C_7 \times C_{41}$.
8. $(\mathbb{Z}/49)^*$ og $(\mathbb{Z}/41)^*$ er cykliske (tidligere opgave), så $(\mathbb{Z}/2009)^* = (\mathbb{Z}/49)^* \times (\mathbb{Z}/41)^* = C_{42} \times C_{40}$. Videre (Kinesisk ...) er $C_{42} = C_2 \times C_3 \times C_7$ og $C_{40} = C_8 \times C_5$. Derfor er fremstillingen $C_2 \times C_8 \times C_3 \times C_5 \times C_7$.
9. Isotropigruppen består af permutationer, der permuterer 1, 2 og 3, 4, 5. Antal = $2! \cdot 3! = 12$. Længden af banen: $= 5!/12 = 10$ lig med antal 5-sæt med 2 koord = 1 og 3 koord. = 0.
10. Polya: $(1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^5 + 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^1)/10 = 108$.
11. 120.
12. Hvis $|G| = 2009$, er der én Sylow-7-undergruppe S (af orden 49 og én Sylow-41-undergruppe T (af orden 41). Derfor er $G \simeq S \times T$. Grupper af orden 41 er kommutative (nemlig cykliske), og grupper af orden $49 = 7^2$ er kommutative ifølge Derfor er G kommutativ.
13. Restklasser a modulo 2009 svarer til par af restklasser (a_1, a_2) modulo henholdsvis 49 og 41. Der er to involutoriske muligheder for a_1 (da $(\mathbb{Z}/49)^*$ er cyklisk) og to muligheder for a_2 (da $(\mathbb{Z}/41)^*$ er cyklisk). Altså $2 \cdot 2 = 4$ involutoriske muligheder for a .
14. 4 rødder i \mathbb{C} . Ingen rødder i \mathbb{R} . Reducibelt, da graden er > 2 (side ...).
15. Polynomiet har en rod, fx fordi 8 er divisor i $|\mathbb{F}_{41}^*|$ eller fordi 3 er rod. Der er derfor 4 rødder, fordi der er 4 rødder i $X^4 - 1$. Reducibelt, da der er en rod.