

## Facitliste til nyere eksamensopgaver

Listen indeholder facit (eller vink) til eksamensopgaverne (i Mat2AL, Alg2 og Alg1) fra sommeren 2003 og fremefter. Bemærk, at de facitter, der står på listen, næsten *aldrig* er tilstrækkeligt svar på opgaven.

### Sommer 2003

- 30.
- $\sigma = (0\ 1)(2\ 3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9)$ , type =  $2^1 3^1 5^1$ , orden = 30 og fortegn =  $-1$ .
- 15.
- Cykeltyperne:  $1^4 2^1$ ,  $1^2 2^2$  og  $2^3$ . Antallet =  $15 + 45 + 15 + 1 = 76$ .
- Ja,  $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$  eller  $(1\ 4)(2\ 3)$ ; ja,  $\sigma = (1\ 3)$  eller  $(2\ 4)$ ; og nej.
- $C_8 \times C_2 \times C_5$  og  $C_4 \times C_4 \times C_5$ .
- Fx fire af følgende:  $Q_8 \times C_{15}$  (1),  $D_4 \times C_{15}$  (5),  $A_4 \times C_{10}$  eller  $D_3 \times C_{20}$  (7),  $S_4 \times C_5$  (9),  $D_5 \times C_{12}$  (11),  $D_{12} \times C_5$  (13),  $D_6 \times C_{10}$  (15),  $D_{20} \times C_3$  (21),  $D_{10} \times C_6$  eller  $A_4 \times D_5$  (23),  $S_5$  (25),  $A_5 \times C_2$  eller  $D_{15} \times C_4$  (31),  $D_6 \times D_5 = D_{10} \times D_3$  (47),  $D_{60}$  (61),  $D_{30} \times C_2$  (63), ...
- En Sylow-7-undergruppe er normal; ikke tilsvarende for Sylow-19-undergrupperne.
- Homomorfin kan angives som  $z \mapsto z^3$ , idet elementerne i  $C_{15}$  og  $C_{10}$  er komplekse tal; eller som  $\zeta_{15}^i \mapsto \zeta_{10}^{2i}$  (kan alternativt angives additivt:  $i \pmod{15} \mapsto 2i \pmod{10}$ ); eller som  $(x, y) \mapsto (x, 1)$  under identifikationen  $C_{15} = C_5 \times C_3$  og  $C_{10} = C_5 \times C_2$ ; eller som  $C_{15} \rightarrow C_{15}/C_3 = C_5 \rightarrow C_{10}$  under de naturlige inklusioner  $C_3 \subset C_{15}$  og  $C_5 \subset C_{10}$ .
- $(2p)^{-1}(2^p + (p-1) \cdot 2 + p \cdot 2^{(p+1)/2})$ .
- $2002 = -i(1+i)^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot (3+2i)(3-2i)$  og 2003 er et primelement. Antallene er 192 (eller 48 bortset fra associering) og 8 (eller 2 bortset fra associering).
- 2 i  $\mathbb{R}$ , 2002 i  $\mathbb{C}$ , 2002 i  $\mathbb{F}_{2003}$  og 14 i  $\mathbb{F}_{29}$ .
- $f$  er reducibel i  $\mathbb{R}[X]$ .
- $f$  er irreducibel i  $\mathbb{Q}[X]$ .
- $f = (X^2 - 44)(X^2 + 44)$  er reducibel i  $\mathbb{F}_{2003}[X]$ .

### Vinter 2003/04

- 55.
- 12.
- $(0)(1\ 2\ 4\ 8)(3\ 6\ 12\ 9)(5\ 10)(7\ 14\ 13\ 11)$ . Type  $1^1 2^1 4^3$ . Orden 4. Fortegn 1.
- $2^1 6^1$ ,  $2^1 3^1 6^1$ ,  $2^2 3^1$ ,  $2^2 3^2$ ,  $2^4 3^1$ .
- Benyt, at  $\gamma$  og  $\gamma^{-1}$  er konjugerede, fordi de har samme cykeltype, ...
- $C_2 \times C_3 \times C_{27}$  og  $C_2 \times C_9 \times C_9$ .
- Fx fire af:  $A_5$ ,  $A_4 \times C_5$ ,  $D_{30} = D_{15} \times C_2$ ,  $D_{10} \times C_3$ ,  $D_6 \times C_5 = D_3 \times C_{10}$ ,  $D_3 \times D_5$ .
- Benyt Sylow's sætninger, ...
- 24.

2. juli 2009

10. Ordenen af billedet er 2. Med sign:  $S_4 \rightarrow C_2$  er  $S_4 \rightarrow C_2 \hookrightarrow C_{10}$  et eksempel.
11.  $(2^9 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 2^3 + 9 \cdot 2^5)/18 = 46$ .
12.  $5 = (2+i)(2-i)$ ,  $5+i = (1+i)(3-2i)$ ,  $5+2i = \text{primelement}$ ,  $5+3i = (1+i)(4-i)$ .
13.  $f$  er reducibel i  $\mathbb{R}[X]$ .
14.  $f$  er irreducibel i  $\mathbb{Q}[X]$ .
15.  $f = X^6 + 1$  i  $\mathbb{F}_{13}[X]$ , og  $f$  er reducibel, idet fx 2 er rod.

**Sommer 2004**

1. 166.
2.  $(0\ 3\ 8\ 9\ 6\ 10\ 2)(1\ 4)(5\ 7)$ ;  $2^2 7^1$ ; orden 14, sign = 1.
3.  $(1\ 4\ 2\ 5\ 3)$ ,  $(1\ 4\ 3\ 2\ 5)$ ,  $(1\ 4)(2\ 5)(3)$ ,  $(1\ 5)(2\ 4\ 3)$ ,  $(1\ 5\ 3)(2\ 4)$ ,  $(1\ 5\ 2\ 4)(3)$ . De første tre er de lige af dem.
4. —
5. Der er 6 abelske grupper af orden 72, – med 56, 24, 14, 8, 6, og 2 elementer af orden 6.
6.  $\varphi(16) = 8$ , så  $|(\mathbb{Z}/16)^*| = 8$ , svarende til restklasserne af 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Kvadraterne er 1, 9, 9, 1, 1, 9, 9, 1, specielt 3 elementer af orden 2. Det udelukker  $C_8$  og  $C_2 \times C_2 \times C_2$ , tilbage bliver muligheden  $(\mathbb{Z}/16)^* = C_4 \times C_2$ .
7.  $S_2 \times S_3 \subset S_5$ , bestående af de permutationer, der stabiliserer  $\{1, 2\}$  og  $\{3, 4, 5\}$ ; den har orden 12. Banen består af alle 2-element-delmængder  $\{a, b\}$ .
8.  $\#Syl_7 = 1$ , da 11, 13 og 11·13 er udelukket. Tilsvarende:  $\#Syl_{11} = 1$ ,  $\#Syl_{13} = 1$ . Derfor er  $G$  produktet af sine Sylow-undergrupper, og dermed  $G = C_7 \times C_{11} \times C_{13} = C_{1001}$ .
9. Sæt  $H := \{\sigma^i \tau^j\}$ . Brug  $\sigma \tau = \tau \sigma$ : Først, da  $\sigma^i \tau^j \sigma^k \tau^l = \sigma^{i+k} \tau^{j+l}$ , er  $H$  stabil. Videre er  $e = \sigma^0 \tau^0 \in H$ . Og for  $h = \sigma^i \tau^j$  er  $h^{-1} = \sigma^{-i} \tau^{-j} \in H$ .  
Tilsvarende udgør produkter af potenser af 3 disjunkte 5-cykler en undergruppe af orden  $5^3 = 125$ , isomorf med  $C_5 \times C_5 \times C_5$ . Tallet 5 forekommer 3 gange i primopløsningen af  $15!$ , så undergruppen er en Sylow-5-undergruppe af  $S_{15}$ . Da Sylow-5-undergrupperne parvis er konjugerede, er de specielt alle isomorfe med den fundne.
10.  $|G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$  giver mulighederne 1, 4, 10; der er 1 i  $C_{60}$ , og 4 i  $C_5 \times A_4$ , og 10 i  $A_5$ .
11.  $\frac{1}{8}(3^8 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^5) = 954$ .
12.  $(53 - 12\sqrt{11})/(3 - 2\sqrt{11}) = 3 - 2\sqrt{11}$ , og  $(3 - 2\sqrt{11})/(4 - \sqrt{11}) = -2 - \sqrt{11}$ , så  $(53 - 12\sqrt{11}) = (4 - \sqrt{11})^2(-2 - \sqrt{11})^2$  [også  $= (7 + 2\sqrt{11})^2(13 - 4\sqrt{11})^2$ ].
13. Nej.
14. Ja, anvend Eisenstein på  $f(X+1) = X^4 + 4X^3 + 18X^2 + 28X + 22$  med  $p = 2$ .
15.  $(X-a)(X+a)(X-3/a)(X+3/a) = (X^2 - a^2)(X^2 - 9/a^2) = X^4 - (a^2 + 9/a^2)X^2 + 9$ , og altså =  $f(X)$  netop når  $a^2 + 9/a^2 = -12$ , dvs netop når  $f(a) = 0$ .

**Vinter 2004–05**

1. 1600; 400.
2.  $(1\ 3)(2\ 4\ 5\ 6\ 8)(7\ 9)$ ;  $2^2 5^1$ ; 10; 1;  $(2\ 8\ 6\ 5\ 4)$ .
3. 176.
4.  $1^2 4^1$ ,  $2^1 4^1$ .

2. juli 2009

5. 16.
6.  $C_{125} \times C_{31}, C_{25} \times C_5 \times C_{31}, C_5 \times C_5 \times C_5 \times C_{31}$ .
7. —
8.  $167^{12}$ .
9. —
10.  $f$  er reducibel i  $\mathbb{R}[X]$ .
11.  $f$  er irreducibel i  $\mathbb{Q}[X]$ .
12. #rødder = 10.
13. 700.
14. 430.
15.  $4^6 = 4096$ .

**Juni 2005**

1.  $4 \cdot 232 = 928$ . Største orden 232.
2.  $15 \cdot 6 = 90$ .  $C(\sigma)$  består af de 8 permutationer  $(1\ 2)^i(3\ 4\ 5\ 6)^j$  for  $i = 0, 1$  og  $j = 0, 1, 2, 3$ .
3. —
4. For  $S_6$  er ordenerne:  $2^4 = 16, 3^2 = 9$  og 5; for  $A_6$  er de:  $2^3 = 8, 3^2 = 9$  og 5.
5. Fx fordi Sylow-401-undergruppen er normal [Kræver begrundelse].
6. Der er fem, nemlig:  $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_{10}, C_2 \times C_2 \times C_{20}, C_4 \times C_{20}, C_2 \times C_{40}, C_{80}$ . Alternativ, som produkt af cykliske grupper af primtalsordener:  $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_5, C_2 \times C_2 \times C_4 \times C_5, C_4 \times C_4 \times C_5, C_2 \times C_8 \times C_5, C_{16} \times C_5$ . —
7.  $(3^9 + 6 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^3 + 9 \cdot 3^5)/18$ .
8. Restklasserne modulo 12 af 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10. Fx fordi de ikke udgør en undergruppe, da antallet af nuldelere, 8, ikke er divisor i 12 [Eller: da  $2 + 3 = 5$  ikke er en nuldelel.]
9. Restklasserne modulo 9 af 0, 3 og 6. —
10.  $f$  er reducibel.
11.  $f$  er irreducibel (Eisenstein med  $p = 5$ ).
12.  $g = (X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$  og  
 $g = (X + 1)(X - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3})(X - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3})(X + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3})(X + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3})$ .
13.  $g = (X - [2])(X - [3])(X - [4])(X - [5])(X - [6])$ .
14.  $\{\pm 1\}$ .
15. Fx  $2 \cdot 7 = (1 + \sqrt{-13})(1 - \sqrt{-13})$ .

**Juni 2006**

1.  $16 \cdot 58 = 928$ . 464.
2. Normale:  $\langle D \rangle$  og undergrupper heri er normale (sammen med  $\langle D^2, S \rangle$  og  $\langle D^2, DS \rangle$  er det faktisk samtlige ægte normale). Unormal: Fx  $\langle S \rangle$ .
3. 120.  $C(\sigma) = \langle \sigma \rangle$ .
4. 1 kommutativ. Ikke-kommutative: Fx  $D_{1003}, C_{17} \times D_{59}, C_{59} \times D_{17}$ .
5.  $5^{24}$ .

2. juli 2009

6.  $14 \cdot 12 = 168$ .
7. 8.
8.  $d = 1, 2, 4$ .  $(\mathbb{Z}/16)^* \simeq C_4 \times C_2$ . Ja.
9.  $\frac{1}{20}(N^{10} + 5N^6 + 6N^5 + 4N^2 + 4N)$  ( $= 78$  for  $N = 2$ ).
10. Restklasserne  $a = [0], [6], [12]$  og  $[18]$ .
11.  $N(2 + \sqrt{5}) = -1$ , enhed;  $N(1 + 2\sqrt{5}) = -19$ , irreducibel;  $N(9 - 4\sqrt{5}) = 1$ , enhed;  $N(\sqrt{5}) = -5$ , irreducibel.
12.  $2006 = (-i) \cdot (1 + i)^2 \cdot (4 + i)(4 - i) \cdot 59$ .
13. Reducibel.
14. Irreducibel.
15. 1.

**Juni 2007**

1.  $C_9 \times C_{223} = C_{2007}$  og  $C_3 \times C_3 \times C_{223}$ . 2 og 8.
2.  $[(\mathbb{Z}/385)^* = (\mathbb{Z}/5)^* \times (\mathbb{Z}/7)^* \times (\mathbb{Z}/11)^* = C_4 \times C_6 \times C_{10} =] C_2 \times C_2 \times C_4 \times C_3 \times C_5$ .
3. -
4.  $\{\pm \text{id}\} = \{\text{id}, D^3\}$ .
5. På tabelform:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .
6.  $2^7, 3^3, 5$ .
7. -
8.  $\frac{1}{4}(3^{15} + 3^{10} + 3^9 + 3^8)$ .
9. - .  $a = [\pm 1]$ .
10. -
11. 3. Fx 0, 4, 8.
12.  $[0], [1], [5], [6]$ .
13. Reducibelt (har en rod).
14. Irreducibelt (ingen rødder og grad 2).
15. Reducibelt (da  $[5]$  er rod).

**Juni 2008**

1.  $|\sigma| = 60$ . For  $\sigma^{2008}$ : type  $= 1^4 3^2 5^1$  (eller blot  $3^2 5^1$ ), orden 15.
2. 6. Fx  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .
3. - ; Med  $D_4 \subseteq S_4$  og  $C_{251} \subseteq S_{251}$  er  $D_4 \times C_{251} \subseteq S_{255}$ .
4. [ Fordi  $6(x + y) = 6x + 6y$  ]; kernen  $= \{[0], [10]\}$ .
5.  $C_8 \times C_{251}, C_2 \times C_4 \times C_{251}, C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_{251}$ ; hhv 1, 3 og 7 elementer af orden 2.
6.  $(\mathbb{Z}/2008)^* = (\mathbb{Z}/8)^* \times (\mathbb{Z}/251)^* = C_2 \times C_2 \times C_{250} = C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_{125}$ .
7. -
8. Henholdsvis  $C_{359}$  [orden  $= p$ ],  $C_{361}$  og  $C_{19} \times C_{19}$  [orden  $= p^2$ ],  $C_{362} = C_2 \times C_{181}$  og  $D_{181}$  [orden  $= 2p$ ], og  $C_{365} = C_5 \times C_{73}$  [orden  $= 5p$ , hvor  $p \not\equiv 1 \pmod{5}$ ].
9.  $251^{10}$ .

2. juli 2009

10. 48 [antallet af Sylow-7-undergrupper må være 8].
11.  $\frac{1}{4}(2^{25} + 2 \cdot 2^7 + 2^{13})$ .
12.  $[f(\beta) = 0 \iff \beta^k = a \iff \beta^k = \alpha^k \iff \beta^k \alpha^{-k} = 1 \iff (\beta \alpha^{-1})^k = 1]$ .
13. 2008 rødder [de er forskellige ifølge spm 12]. Der er 2 reelle rødder [iflg spm 12].
14. [ Med  $a := [2]$  er (ifølge Fermat):  $a^{2008} = (a^{251})^8 = a^8 = [2^8] = [256] = [5]. ]$
15. 2 rødder [iflg spm 12, spm 14, og vinket].

**Juni 2009**

1.  $\sigma_2 = (1\ 2\ 4\ 8\ 5\ 10\ 9\ 7\ 3\ 6)(11)$ .
2. FEJL I OPGAVER. Korrigeret opgave: Type  $1^{15} 5^2$ ,  $\sigma_2^2 = (1\ 4\ 5\ 9\ 3)(2\ 8\ 10\ 7\ 6)(11)$   
 $\sigma_2^4 = (1\ 5\ 3\ 4\ 9)(2\ 10\ 6\ 8\ 7)(11)$   
 $\mu$  kan aflæses; på cykelform fx:  $\mu = (1)(2)(11)(4\ 5\ 3\ 9)(6\ 7\ 8\ 10)$ .
3. #10-cykler er  $11 \cdot 9!$ , så  $|C(\sigma_2)| = 11!/(11 \cdot 9!) = 10$ .
4. Hvis  $n$  er ordenen af  $g$ , så er  $g^n = 1$ , hvoraf  $\varphi(g)^n = 1$ , hvoraf  $k \mid n$ .
5. Ordenen er 6, da  $3^2 \equiv 2 \not\equiv 1$  og  $3^3 \equiv -1 \not\equiv 1$ .  $|(\mathbb{Z}/49)^*| = \varphi(49) = 6 \cdot 7 = 42$ .  
 Ordenen af 3 modulo 49 er divisor i  $7 \cdot 6$ , og ifølge foregående opgave et multiplum af 6.  
 Den er ikke 6, idet  $3^6 = 81 \cdot 3^2 \equiv (-17) \cdot 3 \cdot 3 \equiv -6 \not\equiv 1$ . Altså er den 42.
6.  $(\mathbb{Z}/2009)^* = (\mathbb{Z}/49)^* \times (\mathbb{Z}/41)^*$ . Orden:  $\varphi(2009) = \varphi(49) \cdot \varphi(41) = 42 \cdot 40 = 1.680$ .  
 $(\mathbb{Z}/49)^*$  er cyklisk af orden 42 (forrige opgave) og  $(\mathbb{Z}/41)^*$  er cyklisk af orden 40 (ifølge ...), så maksimale elementorden er mindste fælles multiplum af 42 og 40, dvs  $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$ .  
 Modulo 41 er  $3^4 = 81 \equiv -1$ , så 3 har orden 8. Modulo 49 har 3 orden 42. Modulo 2009 er ordenen af 3 det mindste fælles multiplum af 8 og 42, dvs  $= 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$ .
7. Antallet er 2, nemlig  $C_{49} \times C_{41}$  og  $C_7 \times C_7 \times C_{41}$ .
8.  $(\mathbb{Z}/49)^*$  og  $(\mathbb{Z}/41)^*$  er cykliske (tidligere opgave), så  $(\mathbb{Z}/2009)^* = (\mathbb{Z}/49)^* \times (\mathbb{Z}/41)^* = C_{42} \times C_{40}$ . Videre (Kinesisk ...) er  $C_{42} = C_2 \times C_3 \times C_7$  og  $C_{40} = C_8 \times C_5$ . Derfor er fremstillingen  $C_2 \times C_8 \times C_3 \times C_5 \times C_7$ .
9. Isotropigruppen består af permutationer, der permuterer 1, 2 og 3, 4, 5. Antal =  $2! \cdot 3! = 12$ . Længden af banen:  $= 5!/12 = 10$  lig med antal 5-sæt med 2 koord = 1 og 3 koord. = 0.
10. Polya:  $(1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^5 + 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^1)/10 = 108$ .
11. 120.
12. Hvis  $|G| = 2009$ , er der én Sylow-7-undergruppe  $S$  (af orden 49) og én Sylow-41-undergruppe  $T$  (af orden 41). Derfor er  $G \simeq S \times T$ . Grupper af orden 41 er kommutative (nemlig cykliske), og grupper af orden  $49 = 7^2$  er kommutative ifølge .... Derfor er  $G$  kommutativ.
13. Restklasser  $a$  modulo 2009 svarer til par af restklasser  $(a_1, a_2)$  modulo henholdsvis 49 og 41. Der er to involutoriske muligheder for  $a_1$  (da  $(\mathbb{Z}/49)^*$  er cyklisk) og to muligheder for  $a_2$  (da  $(\mathbb{Z}/41)^*$  er cyklisk). Altså  $2 \cdot 2 = 4$  involutoriske muligheder for  $a$ .
14. 4 rødder i  $\mathbb{C}$ . Ingen rødder i  $\mathbb{R}$ . Reducibelt, da graden er  $> 2$  (side ...).
15. Polynomiet har en rod, fx fordi 8 er divisor i  $|\mathbb{F}_{41}^*|$  eller fordi 3 er rod. Der er derfor 4 rødder, fordi der er 4 rødder i  $X^4 - 1$ . Reducibelt, da der er en rod.