Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet juni 2005

Matematik 2AL og Algebra 2

3 timers skriftlig prøve.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Ved besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $1864 = 8 \cdot 233$, at $2005 = 5 \cdot 401$, og at 233 og 401 er primtal.

1. Hvilken orden har gruppen $(\mathbb{Z}/1864)^*$? Angiv, med begrundelse, den største orden af et element i denne gruppe.

2. Betragt permutationen $\sigma = (1\,2)(3\,4\,5\,6)$ i S_6. Bestem antallet af med σ konjugerede permutationer, og angiv centralisatoren $C(\sigma)$ for σ.

3. Vis, at følgende tre grupper D_{12}, $C_2 \times A_4$ og S_4 er parvis ikke-isomorfe.

4. Angiv ordenerne af Sylow-p-undergrupperne af S_6 og A_6 for de relevante primtal p.

5. Vis, at en gruppe af orden 2005^2 ikke kan være simpel.

6. Bestem alle kommutative grupper af orden 80. Afgør, med begrundelse, om de to grupper $C_2 \times C_{40}$ og $C_2 \times C_2 \times C_{20}$ er isomorfe.

7. Bestem antallet af perlekæder med 9 perler og 3 farver perler. Det er tilstrækkeligt at angive et eksplicit regneudtryk for dette antal.

For en kommutativ ring R kaldes et element $a \in R$ for en *nuldeler*, hvis der findes et element $b \in R$, med $b \neq 0$, så $ab = 0$.

8. Bestem nuldelerne i ringen $\mathbb{Z}/12$, og vis, at de ikke udgør et ideal.

9. Bestem nuldelerne i ringen $\mathbb{Z}/9$. Vis, at hvis nuldelerne i en ring R udgør et ideal i R så er dette ideal et primideal.

I de følgende to opgaver betegner f polynomiet $X^4 + 180$.

10. Afgør, med begrundelse, om f er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

11. Afgør, med begrundelse, om f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.

I de følgende to opgaver betegner g polynomiet $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. Det kan uden bevis benyttes, at $(X-1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = X^6 - 1$.

12. Skriv g som produkt af irreducible polynomier i $\mathbb{R}[X]$ og $\mathbb{C}[X]$.

13. Skriv g som produkt af irreducible polynomier i $\mathbb{F}_7[X]$, hvor $\mathbb{F}_7$ betegner legemet med 7 elementer.

14. Bestem mængden af enheder i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$.

15. Angiv, med begrundelse, to forskellige irreducible opløsninger af et element fra den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$.