Algebra 1

3 timers skriftlig prøve.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Ved besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $2009 = 7^2 \cdot 41$, og at 41 er et primtal.

I de følgende tre spørgsmål identificeres tallene $1, 2, \ldots, 11$ med deres restklasser modulo 11. Herved kan permutationer af $\mathbb{Z}/11$ opfattes som permutationer af tallene $1, 2, \ldots, 11$. For $a = 1, \ldots, 10$ betegnes med σ_a permutationen af $\mathbb{Z}/11$ bestemt ved $x \mapsto ax$

1. Det er let at se, at restklassen af 2 har orden 10 i gruppen $(\mathbb{Z}/11)^*$. Vis, at permutationen σ_2 har cykeltype $1^1 10^1$.

2. Hvilken cykeltype har permutationerne ${\sigma_2}^2$ og ${\sigma_2}^4$? Bestem, som produkt af disjunkte cykler, en permutation $\mu \in \mathrm{S}_{11}$ således, at ${\sigma_2}^4 = \mu {\sigma_2}^2 \mu^{-1}$. [Fodnote[1]]

3. Bestem i gruppen S_{11} ordenen af centralisatoren for σ_2.

4. Lad $\varphi\colon G \to G'$ være en gruppehomomorfi, og lad $g \in G$ være et element af endelig orden. Antag, at $\varphi(g)$ har orden k. Vis, at g's orden er et multiplum af k.

5. Vis, at restklassen af 3 modulo 7 har orden 6 i gruppen $(\mathbb{Z}/7)^*$. Hvilken orden har gruppen $(\mathbb{Z}/49)^*$? Vis, at restklassen af 3 i gruppen $(\mathbb{Z}/49)^*$ har orden 42.

6. Bestem ordenen af gruppen $(\mathbb{Z}/2009)^*$. Bestem den maksimale elementorden i gruppen $(\mathbb{Z}/2009)^*$. Hvilken orden har restklassen af 3 modulo 2009?

7. Bestem antallet af kommutative grupper af orden 2009.

8. Bestem fremstillingen af $(\mathbb{Z}/2009)^*$ som produkt af cykliske grupper af primtalspotensordener.

9. Gruppen S_5 virker på talrummet $\mathbb{R}^5$ ved at permutere de 5 koordinater. Bestem for $x = (1, 1, 0, 0, 0)$ ordenen af isotropigrupppen for x og længden af banen gennem x.

10. Lagkager skæres i 10 ens stykker, der glaseres individuelt med glasur af to farver. Stykkerne bliver liggende i lagkageform på fadet. Hvor mange forskellige (gennemskårne) lagkager med glasur kan der serveres.

11. Bestem antallet af elementer af orden 11 i en simpel gruppe af orden 660.

12. Vis, at enhver gruppe af orden 2009 er kommutativ.

13. Et element a i en ring R kaldes *involutorisk*, hvis $a^2 = 1$. Bestem antallet af involutoriske elementer i restklasseringen $\mathbb{Z}/2009$.

14. Hvor mange komplekse rødder har polynomiet $X^4 + 1$? Hvor mange af dem er reelle? Er $X^4 + 1$ reducibelt i ringen $\mathbb{R}[X]$?

15. Hvor mange rødder har polynomiet $X^4 + 1$ i $\mathbb{F}_{41}$? Er $X^4 + 1$ reducibelt i ringen $\mathbb{F}_{41}[X]$?

---

[1] Originalteksten havde σ_4 og (fejlagtigt) σ_8 for ${\sigma_2}^2$ og ${\sigma_2}^4$.