**Københavns Universitet**
**Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 2006**

# Matematik 2KF

Velkommen til denne tre timers eksamen. Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker ikke ned og anbefales ved større ændringer.

Ved eksamen er alle skriftlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o. lign.) tilladt. Lommeregnere og andet elektronisk udstyr må ikke anvendes.

Eksamenssættet består af 4 opgaver og er på 2 sider. Et fuldstændigt besvaret eksamenssæt tildeles 100 point. De enkelte opgavers pointfordeling fremgår nedenfor.

## **Opgave 1** (25 points)

Betragt funktionen

$$f(z) = \exp(z^2) - 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

1) Vis, at $f$ har et nulpunkt af orden 2 for $z = 0$.

2) Bestem grænseværdien

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z^2}.$$

3) Find samtlige nulpunkter $z \neq 0$ for $f$ i cirkelskiven $K(0, 3)$ og angiv deres orden.

## **Opgave 2** (25 points)

Udtrykket

$$f(z) = \frac{e^z}{1 - z}$$

definerer en meromorf funktion i $\mathbb{C}$ med en simpel pol i $z = 1$.

1) Gør rede for at $f(z)$ kan fremstilles ved en potensrække for $|z| < 1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n.$$

2) Vis, at

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

3) Find Laurentrækken for $f$ med centrum $z = 1$.


Opgavesættet fortsættes på side 2

**Opgave 3** (25 points)

Betragt hovedlogaritmen Log, som er en holomorf funktion i området $\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$.
1) Gør rede for at funktionen

$$f(z) = \sin(i \operatorname{Log} z), \quad z \in \mathbb{C}_\pi$$

er holomorf og udregn $f(1)$ og $f(i)$.

2) Vis, at

$$f(z) = \frac{1 - z^2}{2iz}, \quad f'(z) = \frac{i}{2}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \text{ for } z \in \mathbb{C}_\pi.$$

3) Lad $\gamma$ være en vej i $\mathbb{C}_\pi$ fra $z = 1$ til $z = i$. Udregn kurveintegralet

$$\int_\gamma \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) dz.$$

**Opgave 4** (25 points)

Vis, at integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \cos t)^2}$$

har værdien $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. Der lægges vægt på at de enkelte skridt i udregningen træder klart frem.