

LinAlg
Vejledende besvarelse
27. januar 2005, 9–12

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregner eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt otte underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen. Opgaver med to underspørgsmål vægtes således dobbelt så højt som opgaver med ét underspørgsmål.

Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Ved den samlede bedømmelse indregnes, med vægt 30%, et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i kursets forløb.

En vejledende besvarelse er indført i lilla tekst.

Opgave 1

(a) Udfør rækkeoperationer på

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

der fører matricen på reduceret trappematrixform. De udførte rækkeoperationer ønskes dokumenteret i besvarelsen.

Vi udfører:

$$B_{13} : \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{21}(-1) : \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{12}(-1) : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1(1/2), M_3(-1) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Redegør for at matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

er invertibel, og bestem $\underline{\underline{A}}^{-1}$.

Vi har set i (a) at $(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}})$ overføres med rækkeoperationer til en matrix på formen $(\underline{\underline{E}}\underline{\underline{B}})$. Specielt har $\underline{\underline{A}}$ fuld rang og er dermed invertibel.

Den inverse matrix kan endda aflæses:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opgave 2

Man kan med fordel argumentere ud fra maplearket side 5

Bestem samtlige løsninger til differentiaalligningen

$$u''(t) - 4u'(t) + 4u(t) = 4e^{4t}.$$

Det karakteristiske polynomium for differentiaalligningen er

$$z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2.$$

Der er altså to ens rødder. Samtlige løsninger til den homogene ligning er

$$C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

For at finde samtlige løsninger til den inhomogene ligning mangler vi blot at finde en enkelt løsning. En sådan kan aflæses fra maplearket. Samtlige løsninger er derfor

$$e^{4t} + C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t},$$

hvor C_1 og C_2 gennemløber alle komplekse tal.

Opgave 3

Man kan med fordel argumentere ud fra maplearket side 5

Betragt den lineære afbildning $f : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^3$ givet ved forskriften

$$f \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + (2 - i)z_2 + (1 + 2i)z_3 + (-1 - i)z_4 \\ (1 + i)z_1 + z_2 + 3iz_3 + 2z_4 \\ iz_1 + 2z_2 + (-2 + 2i)z_3 + (-1 + i)z_4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestem rangen $\text{rg}(f)$ og dimensionen af kernen $\dim(\ker f)$.

Af maplearket fremgår trappeformen af matricen, og det ses at denne har to trin. Derfor har matricen, og dermed f , rang 2. Dimensionen af kernen fås let ved dimensionsætningen:

$$\dim(\ker f) = \dim(\mathbb{C}^4) - \text{rg}(f) = 4 - 2 = 2.$$

(b) Bestem en basis for billedet $f(\mathbb{C}^4)$ af f og en basis for kernen $\ker f$ for f .

En basis for billedet findes ved at udvælge de søjler af matricen hvori de to trin falder, altså

$$(1, 1 + i, i), (2 - i, 1, 2).$$

Vi sætter matricen på reduceret trappematrixform for at bestemme en basis for kernen, og til det formål skal vi bruge at

$$-\frac{1}{2+i} = -\frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = -\frac{2-i}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

således at

$$-\frac{2+2i}{2+i} = -\frac{(2+2i)(2-i)}{5} = -\frac{4+2+2i}{5} = -\frac{6}{5} - \frac{2}{5}i$$

Dermed fås med udgangspunkt i matricen fra maplearket:

$$\begin{aligned} S_{12}(-1) &: \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2i & -3-3i \\ 0 & -2-i & 1 & 2+2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M_2(-1/(2+i)) &: \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2i & -3-3i \\ 0 & 1 & -1/(2+i) & -(2+2i)/(2+i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2i & -3-3i \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i & -\frac{6}{5} - \frac{2}{5}i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ S_{12}(-4) &: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i + \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i & -3-3i + \frac{24}{5} + \frac{8}{5}i \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i & -\frac{6}{5} - \frac{2}{5}i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{5} + \frac{6}{5}i & \frac{9}{5} - \frac{7}{5}i \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i & -\frac{6}{5} - \frac{2}{5}i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi aflæser derfor at det homogene ligningssystem der bestemmer kernen har løsningen

$$\begin{aligned} x_1 &= -\left(\frac{8}{5} + \frac{6}{5}i\right)s - \left(\frac{9}{5} - \frac{7}{5}i\right)t \\ x_2 &= -\left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right)s - \left(-\frac{6}{5} - \frac{2}{5}i\right)t \\ x_3 &= s \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

og derfor kan basen vælges som

$$\left(-\frac{8}{5} - \frac{6}{5}i, \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i, 1, 0\right), \left(-\frac{9}{5} + \frac{7}{5}i, \frac{6}{5} + \frac{2}{5}i, 0, 1\right)$$

Opgave 4

Redegør for at begge matricerne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 \\ 46 & 47 & 48 & 49 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 \\ 55 & 56 & 57 & 58 & 59 & 60 & 61 & 62 & 63 \\ 64 & 65 & 66 & 67 & 68 & 69 & 70 & 71 & 72 \\ 73 & 74 & 75 & 76 & 77 & 78 & 79 & 80 & 81 \end{pmatrix}$$

har determinant nul.

To rækkeoperationer $S_{21}(-1)$ og $S_{31}(-1)$ fører 3×3 -matricen på formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

og ved en operation $S_{32}(-2)$ får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man ser nemt, fx ved udvikling efter tredje række, at den sidste matrix har determinant 0, og da operationer af type S ikke forandrer determinanten, har vi vist det ønskede.

Argumentet for 9×9 -matricen kan føres tilsvarende. Efter operationer $S_{12}(-1)$ og $S_{13}(-1)$ er række 2 og 3 konstante med værdierne henholdsvis 9 og 18 på hver plads. Efter endnu en operation $S_{23}(-2)$ er tredje række konstant nul, og determinanten er derfor ligeledes nul.

Opgave 5

Man kan med fordel argumentere ud fra maplearket side 5

Betragt matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & -3 \\ -1 & 5 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 8 & -3 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Bestem for hver egenværdi for $\underline{\underline{A}}$ en basis for det tilhørende egenrum.

Ifølge maplearket er egenværdierne for 4×4 matricen $\underline{\underline{A}}$ lig med 3 og 6. Egenværdien 3 har rodmultiplicitet 3 og egenværdien 6 har rodmultiplicitet 1. Vi finder de tilhørende egenvektorer.

For egenværdien 3 finder vi

$$\underline{\underline{A}} - 3\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

som efter Gauss-elimination ses at have trappematrixform

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De frie variable er x_2, x_3, x_4 . Kernen for denne matrix er egenrummet hørende til egenværdien 3. Vi bestemmer en basis ved at sætte $x_1 = r$, $x_2 = s$, $x_3 = t$ og løse for x_1 . Alle vektorer i egenrummet kan derfor udtrykkes ved

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r + 5s - 3t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En basis for egenrummet er givet ved

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

For egenværdien 6 finder vi

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} - 6\underline{\underline{E}} &= \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 5 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -6 \\ -1 & -1 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & -15 & 21 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -15 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(de udførte rækkeoperationer er $B_{14}, S_{21}(-1), S_{31}(-1), S_{41}(-4), S_{42}(-2), S_{43}(-5)$). Her er x_4 en fri variabel vi sætter lig t . Vi finder så, at $x_3 = t, x_2 = t, x_1 = 2t + 5t - 6t = t$. Alle vektorer i egenrummet er altså givet ved

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En basis for egenrummet er givet ved vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (b) Vis at der findes en regulær 4×4 matrix $\underline{\underline{S}}$ og en 4×4 diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}$ så $\underline{\underline{S}}$ og $\underline{\underline{D}}$ opfylder

$$\underline{\underline{S}}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{D}}.$$

Angiv $\underline{\underline{S}}^{-1}$ og $\underline{\underline{D}}$. (Det er ikke nødvendigt at bestemme $\underline{\underline{S}}$).

Da vi i (a) fandt 4 lineært uafhængige egenvektorer for $\underline{\underline{A}}$ har vi en basis af egenvektorer og $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar med f.eks.

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{S}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(de sidste tre søjler i $\underline{\underline{S}}^{-1}$ kan skrives i vilkårlig rækkefølge uden at $\underline{\underline{D}}$ ændres.).