LinAlg
Skriftlig prøve
22. januar 2007, 10–13
Vejledende besvarelse

Dette eksamenssæt løber over 5 sider, denne side inklusive. Denne side bedes udfyldt og vedlagt besvarelsen.

- Mit eksamensnummer er __________
- Min klasselærer var:
  - ☐ Henning Brandt-Jensen
  - ☐ Michael Wermund Bruun
  - ☐ Anders Gaarde
  - ☐ Esben Bistrup Halvorsen
  - ☐ Rune Johansen
  - ☐ Søren Jøndrup
  - ☐ Jens Ulrik Lefmann
  - ☐ Lars Lund-Hansen
  - ☐ Martin Olsen
  - ☐ Jørn Børling Olsson
  - ☐ Gunnar Restorff
  - ☐ Simon Sneider
  - ☐ *Ved ikke/Ønsker ikke at oplyse/Fulgte ikke klasseundervisning.*

Det tilstræbes, men kan ikke garanteres, at din klasselærer retter besvarelsen. Dersom dette ikke ønskes, benyttes den nederste afkrydsningsmulighed.

Vejledning

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregnere eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt ni underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen. Opgaver med to underspørgsmål vægtes således dobbelt så højt som opgaver med ét underspørgsmål.

Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Ved den samlede bedømmelse indregnes, med vægt 30%, et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i kursets forløb.

En vejledende besvarelse er indført i lilla tekst.

Nogle få kommentarer om retteprocessen er indført i blå tekst. Vi foreslår at I giver 10 point pr. delspørgsmål; vi omregner selv scoren til en pointtal i $[0; 70]$.

I opfordres til at skrive i de besvarelser I retter af hensyn til censorerne. Det er ikke tilladt at notere pointtal eller tilsvarende detaljebedømmelse i besvarelsen, men ellers er der frit slag – idet man dog må huske på at holde sig i vendinger der ikke kan støde eksaminanderne hvis de skulle bede om at se den rettede besvarelse. Benyt rød skrift med mindre eksaminanden gør det.

Jeg anmoder om jeres bedømmelser i to kopier:

- Udfyldt på vedlagte retteskema med jeres kommentarer til brug for voteringen med censor. Afleverer skemaerne til Lene samtidig med at I afleverer opgaverne.
- I elektronisk form som talpar med eksamensnummer og pointtal til brug ved sammenregning med ugeopgavepoint og til statistik. Helst i kolonner så jeg kan importere til Excel (eller som `.xls`). Send pr. epost til `eilers@math.ku.dk`

Jeg skal – efter hukommelsen – gentage nogle gode forslag jeg i sin tid fik fra Gutmann. Benyt "$\surd$" og "$\div$" for rigtigt og forkert. Benyt "r" i margen for helt rigtigt delspørgsmål, "R" for helt rigtig opgave. Hjælp censor med at bestemme omfanget af besvarelser der er delt over flere ark eller sider, som i "3b fortsætter ark 3" eller "ikke mere af opgave 4". Udpeg hvor regnefejl introduceres og marker i margen hvis der kun er en fejl og resten er følgefejl. Hvis der er så mange akkumulerede fejl at I opgiver at følge med, så skriv det i margen. Hvis der er store områder I ikke kan give point for, så marker det med en bølgelinje i margen og skriv "tomgang".

Jeg bruger selv flittigt forkortelserne "rf" for regnefejl, "ff" for følgefejl og "$\pm$f" for fortegnsfejl.

Der er ingen restriktioner hvad angår de studerendes brug af regnemaskiner, computere osv. i den sidste halvdel af eksamenstiden, men man må ikke argumentere direkte ud fra output. Man må derimod gerne argumentere ud fra det udleverede mapleark. Med mindre vi eksplicit kræver mellemregninger, så trækker det ikke automatisk ned hvis en studerende giver resultater uden mellemregninger, selv om man kan mistænke at det er noget en maskine har givet dem. Det må komme an på et skøn. Vi har forsøgt at lave sættet så det præmieres på tid at tænke frem for at taste, men hvis I har problemer med at bedømme, så lad os tage det op pr. email.

Jan Philip & Søren

Opgave 1

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt 4×4 matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Find samtlige løsninger til det lineære ligningssystem

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det er selvfølgelig ok at regne det ud selv, uden import fra Maple, men så skal der gives flere detaljer om gausseliminationen.

Vi benytter resultatet fra maplearket og indsætter $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 1$. Vi finder, at den udvidede koefficientmatrix til det lineære ligningssystem efter Gausselimination giver "row echelon" (i maple notation uden ledende ettaller) formen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7/2 & -7/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ved to rækkeoperationer af type II overføres denne matrix i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

og med endnu tre rækkeoperationer af type III ender vi på

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vi ser nu direkte at ligningssystemet er konsistent, at x_4 er en fri variabel, og at vi ved at sætte $x_4 = \alpha$ finder samtlige løsninger:

$$x_4 = \alpha, \quad x_3 = -\alpha/2, \quad x_2 = -\alpha/2, \quad x_1 = 1 - \alpha/2.$$

(b) Bestem en basis for rækkerummet for A og en basis for søjlerummet for A.

5 point for hver basis. Det er ikke relevant for bedømmelsen om vektorerne afleveres som rækker eller som søjler.

En basis for rækkerummet er givet ved de rækker i rækkeechelonformen der ikke er nul-rækker. Altså

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7/2 & -7/4 \end{bmatrix}$$

Hvis man ønsker vektorer med heltallige koefficienter, kan den sidste vektor erstattes af den parallelle vektor [0021]. Man kan også benytte rækker i matrcien på reduceret rækkeechelonform.

En basis for søjlerummet findes ved at vælge søjlerne i den oprindelige matrix svarende til de ledende variable x_1, x_2, x_3. Altså

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Opgave 2

Vi betragter, for hvert $t \in \mathbb{R}$, matricen

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 0 & t & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & t^2 & -2 & 0 \\ 0 & t & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestem et udtryk for $\det(A_t)$.

Det giver ikke point at postulere et korrekt resultat uden forklaring. Det trækker ned at udvikle på en sådan måde at man dividerer med nul uden at tage hensyn til det, også selv om man skulle ende på det rigtige resultat.

En rækkeoperation af type III fører A_t over i

$$\begin{bmatrix} t & 0 & t & 0 \\ 2 & 1+t & 1 & 0 \\ 0 & t^2 & -2 & 0 \\ 0 & t & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

så ved at udvikle after sidste søjle ser vi at

$$\det(A_t) = \det \begin{bmatrix} t & 0 & t \\ 2 & 1+t & 1 \\ 0 & t^2 & -2 \end{bmatrix}$$

En søjleoperation af type III fører den sidstnævnte matrix over i

$$\begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 2 & 1+t & -1 \\ 0 & t^2 & -2 \end{bmatrix}$$

så ved at udvikle efter første række ender vi på

$$\begin{aligned} \det(A_t) &= \det \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 2 & 1+t & -1 \\ 0 & t^2 & -2 \end{bmatrix} \\ &= t \det \begin{bmatrix} 1+t & -1 \\ t^2 & -2 \end{bmatrix} \\ &= t(t^2 - 2t - 2) \end{aligned}$$

(b) For hvilke $t \in \mathbb{R}$ er A_t invertibel?

Man kan godt få point (cirka halvdelen?) selv om man ikke har et resultat i (a). Er resultatet i (a) forkert må I skønne om det gør opgaven lettere. Hvis ikke, kan der gives fuldt point her.

A_t er præcis invertibel når $\det(A_t) \neq 0$, så vi skal bare løse ligningen

$$t(t^2 - 2t - 2) = 0.$$

Da andengradspolynomiet har rødder $1 \pm \sqrt{3}$ ser vi at A_t er invertibel for alle t pånær 0, $1 - \sqrt{3}$ og $1 + \sqrt{3}$.

Opgave 3

Det oplyses at de tre matricer

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 8 & 5 & 14 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

har samme karakteristiske polynomium.

(a) Præcis en af matricerne er **ikke** diagonaliserbar. Afgør hvilken, og argumenter for påstanden.

"Afgør"giver 3 og "argumenter"7 point.

Matricerne A og B er symmetriske og derfor automatisk diagonaliserbare. B er endda diagonal lige fra starten, så vi ser direkte at dens egenværdier er: -4, med algebraisk multiplicitet to, og 5 med algebraisk multiplicitet et.

For at bevise at C ikke er diagonaliserbar skal vi etablere at den geometriske multiplicitet af en af egenvnærdierne er skarpt mindre end den algebraiske. Dette kan kun forekomme for -4, så vi ser på

$$N(C + 4I) = N(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 8 & 9 & 14 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix})$$

Ved to rækkeoperationer af type III får vi omformet matricen til

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som øjensynligt har rang 2, hvilket viser at egenrummet $N(C+4I)$ har dimension 1. Dermed er den geometriske multiplicitet 1, og således mindre end den algebraiske multiplicitet 2, som ønsket.

Opgave 4

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Vi betragter matricen

$$B = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -5 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -5 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

(a) Bestem en ortonormal basis for nulrummet til matricen $B + 8I$.

Mellemregninger er påkrævet. De behøver ikke at være helt så detaljerede som herunder for fuldt point, men I skal kunne følge at eksaminanden kan algoritmen (eller gør prøve).

En basis for nulrummet aflæses i Maple-arket til

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

For at gøre basen ortonormal må vi benytte Gram-Schmidt som giver

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{p}_1 &= (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{u}_2 &= \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1\|^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \\
\mathbf{p}_2 &= (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/6 \\ 0 \\ 1/6 \\ 2/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \\
\mathbf{u}_3 &= \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{p}_2\|^{-1}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{p}_2) = \sqrt{\frac{3}{4}} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2\sqrt{3} \\ -1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Bestem en ortogonal matrix U og en diagonal matrix Dsåledes at

$$D = U^T B U$$

"Ortogonal"giver 8, "diagonal"2 point.

U opnås ved at søjlevis samle vektorerne i en ortonormalbasis bestående af egenvektorer for B. Vi har fra (a) en ortonormalsystem $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ bestående af 3 sådanne egenvektorer. Da B er symmetrisk er den egenvektor til egenværdien 4 som vi kan aflæse i Maple-arket automatisk ortogonal på alle vektorerne i dette system. Derfor kan vi blot normere

$$\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

så bliver $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$ en ortonormal basis og

$$U = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} & -1/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} & -1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} & 1/2 \end{bmatrix}$$

vil opfylde kravene. Den tilhørende diagonalmatrix er

$$D = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Opgave 5

Vi betragter den lineære afbildning $L : P_3 \to P_3$ givet ved

$$L(p)(x) = p(x-1) + p(0)x$$

(det er ikke nødvendigt at eftervise, at denne afbildning er lineær). Der erindres om at P_3 er vektorrummet bestående af reelle polynomier p af grad mindre end 3, dvs. $p(x) = ax^2 + bx + c$, hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Bestem $L(x^2)$, $L(x)$ og $L(1)$. Opskriv den matrix der repræsenterer L mht. basen $[x^2, x, 1]$ for P_3.

"Bestem"giver 3, "Opskriv"7 point.

Vi udregner

$$L(x^2) = (x-1)^2 + 0 \cdot x = x^2 - 2x + 1, \quad L(x) = x - 1 + 0 \cdot x = x - 1, \quad L(1) = 1 + 1 \cdot x = x + 1.$$

Koordinaterne for disse vektorer (polynomier) i basen $[x^2, x, 1]$ er

$$[L(x^2)]_{[x^2,x,1]} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [L(x)]_{[x^2,x,1]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad [L(1)]_{[x^2,x,1]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matricen der repræsenterer L har disse vektorer som søjler. Det er matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

For at finde matricen kan man alternativt udregne

$$L(ax^2+bx+c) = a(x-1)^2+b(x-1)+c+cx = ax^2+(-2a+b+c)x+(a-b+c).$$

Man ser, at

$$[L(ax^2+bx+c)]_{[x^2,x,1]} = \begin{bmatrix} a \\ -2a+b+c \\ a-b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

(b) Bestem dimensionen af billedrummet for L.

Det er også ok at vise direkte at L er bijektiv.

Dimensionen for billedrummet for L er rangen af den matrix der repræsenterer L (dimensionen af søjlerummet). Ved Gausselimination finder vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

rangen er altså 3 og dimensionen af billedrummet er 3.

Alternativt kan man, ved samme Gausselimination, argumentere for, at ligningssystemet, hvis koefficientmatrix er matricen, der repræsenterer L, altid er konsistent. Derfor fremkommer ethvert polynomium som billede ved afbildningen L.

```
> restart: with(LinearAlgebra):
```

Opgave 1

```
> C:=<<1|-2|-1|-1|a>,<1|2|1|2|b>,
  <2|1|-3|0|c>,<1|3|-2|1|d>>;
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & -3 & 0 & c \\ 1 & 3 & -2 & 1 & d \end{bmatrix}$$

```
> GaussianElimination(C);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & a \\ 0 & 4 & 2 & 3 & b-a \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{4} & c-\frac{3}{4}\,a-\frac{5}{4}\,b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d+a-c \end{bmatrix}$$

Opgave 4

```
> B:=Matrix([[-5,-3,3,-3],[-3,-5,-3,3],
  [3,-3,-5,-3],[-3,3,-3,-5]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -5 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -5 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvectors(B);
```

$$\begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$