LinAlg
Skriftlig prøve
22. januar 2007, 10–13

Dette eksamenssæt løber over 5 sider, denne side inklusive. Denne side bedes udfyldt og vedlagt besvarelsen.

- Mit eksamensnummer er ___________
- Min klasselærer var:
  - ☐ Henning Brandt-Jensen
  - ☐ Michael Wermund Bruun
  - ☐ Anders Gaarde
  - ☐ Esben Bistrup Halvorsen
  - ☐ Rune Johansen
  - ☐ Søren Jøndrup
  - ☐ Jens Ulrik Lefmann
  - ☐ Lars Lund-Hansen
  - ☐ Martin Olsen
  - ☐ Jørn Børling Olsson
  - ☐ Gunnar Restorff
  - ☐ Simon Sneider
  - ☐ *Ved ikke/Ønsker ikke at oplyse/Fulgte ikke klasseundervisning.*

Det tilstræbes, men kan ikke garanteres, at din klasselærer retter besvarelsen. Dersom dette ikke ønskes, benyttes den nederste afkrydsningsmulighed.

Vejledning

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregnere eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt ni underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen. Opgaver med to underspørgsmål vægtes således dobbelt så højt som opgaver med ét underspørgsmål.

Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Ved den samlede bedømmelse indregnes, med vægt 30%, et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i kursets forløb.

Opgave 1

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt 4×4 matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Find samtlige løsninger til det lineære ligningssystem

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Bestem en basis for rækkerummet for A og en basis for søjlerummet for A.

Opgave 2

Vi betragter, for hvert $t \in \mathbb{R}$, matricen

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 0 & t & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & t^2 & -2 & 0 \\ 0 & t & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestem et udtryk for $\det(A_t)$.

(b) For hvilke $t \in \mathbb{R}$ er A_t invertibel?

Opgave 3

Det oplyses at de tre matricer

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 8 & 5 & 14 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

har samme karakteristiske polynomium.

(a) Argumenter for at to af disse matricer er diagonaliserbare og at den tilbageværende ikke er det.

Opgave 4

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Vi betragter matricen

$$B = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -5 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -5 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

(a) Bestem en ortonormal basis for nulrummet til matricen $B + 8I$.

(b) Bestem en ortogonal matrix U og en diagonal matrix D således at

$$D = U^T BU$$

Opgave 5

Vi betragter den lineære afbildning $L : P_3 \to P_3$ givet ved

$$L(p)(x) = p(x-1) + p(0)x$$

(det er ikke nødvendigt at eftervise, at denne afbildning er lineær). Der erindres om at P_3 er vektorrummet bestående af reelle polynomier p af grad mindre end 3, dvs. $p(x) = ax^2 + bx + c$, hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Bestem $L(x^2)$, $L(x)$ og $L(1)$. Opskriv den matrix der repræsenterer L mht. basen $[x^2, x, 1]$ for P_3.

(b) Bestem dimensionen af billedrummet for L.

```
> restart: with(LinearAlgebra):
```

Opgave 1

```
> C:=<<1|-2|-1|-1|a>,<1|2|1|2|b>,
  <2|1|-3|0|c>,<1|3|-2|1|d>>;
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & -3 & 0 & c \\ 1 & 3 & -2 & 1 & d \end{bmatrix}$$

```
> GaussianElimination(C);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & a \\ 0 & 4 & 2 & 3 & b-a \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{4} & c-\frac{3}{4}\,a-\frac{5}{4}\,b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d+a-c \end{bmatrix}$$

Opgave 4

```
> B:=Matrix([[-5,-3,3,-3],[-3,-5,-3,3],
  [3,-3,-5,-3],[-3,3,-3,-5]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -5 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -5 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvectors(B);
```

$$\begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$