

Matematik 1GA
Skriftlig prøve
5. januar 2004, 9–13

Dette eksamenssæt løber over 5 sider, denne side inklusive. Denne side bedes udfyldt og vedlagt besvarelsen.

- Mit eksamensnummer er _____
- Min klasselærer i efterårssemestret 2003 var:
 - Henning Brandt-Jensen
 - David Brink
 - Lars Hansen
 - Jens Ulrik Lefmann
 - Toke Meier Carlsen
 - Martin Olsen
 - Hans Plesner Jakobsen
 - Simon Sneider
 - Flemming Topsøe
 - Peter Trosborg
 - Ved ikke/Ønsker ikke at oplyse/Fulgte ikke klasseundervisning.*
- Ved den samlede bedømmelse indregnes et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i løbet af efterårssemestret 2003 eller 2002.

Sæt ét kryds:

- Jeg har afleveret skriftlige opgaver i efterårssemestret 2003 og ønsker at få indregnet points herfra i den samlede bedømmelse.
- Jeg har afleveret skriftlige opgaver i efterårssemestret 2002 og ønsker at få indregnet points herfra i den samlede bedømmelse.
- Jeg kan ikke påberåbe mig indregning af points.

Vejledning

Opgavesættet til besvarelse over 4 timer består af fem opgaver, benævnt 1, 2, 3, 4, og 5, hver med et antal underspørgsmål, benævnt (a) , (b) og (c) . De i alt ti underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen. Opgaver med tre underspørgsmål vægtes således tre gange højere end opgaver med ét underspørgsmål.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte. Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Opgave 1

(a) ~~Bestem den fuldstændige komplekse løsning til ligningen~~

$$\underline{z^2 - 6iz + 7 = 0.}$$

Opgave 2

Betragt rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, hvor

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

(a) ~~Vis at der gælder~~

$$a_n \leq 3n^{-3}$$

~~for alle $n \in \mathbb{N}$. Konkluder, ved brug af et passende kriterium, at rækken er konvergent.~~

(b) ~~Find rækkens sum.~~

~~[Forslag: Vis først at $a_n + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2}$]~~

Opgave 3

En sekvens af lovlige rækkeoperationer fører matricen

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

over i matricen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -7 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Udfør og angiv de rækkeoperationer der fører den sidstnævnte matrix helt på reduceret rækkeechelonform.

(b) Redegør for at matricen

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 2 & -3 & 8 \\ 3 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

er invertibel, og bestem den inverse matrix.

(c) Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned}2x - 5y + 5z &= e \\2x - 3y + 8z &= \sqrt{2} \\3x - 8y + 7z &= \pi.\end{aligned}$$

Der ønskes eksakte udtryk for eventuelle løsninger.

Opgave 4

I vektorrummet \mathbb{R}^3 betragtes det lineært uafhængige sæt af vektorer

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{u}_3 = (2, 1, -2).$$

(a) Udfør Gram-Schmidt ortonormaliseringsproceduren på sættet $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ og redegør for at det beregnede sæt af vektorer

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$$

udgør en ortonormalbasis for \mathbb{R}^3 .

Lad $O = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ betegne den ortonormalbasis for \mathbb{R}^3 der blev bestemt i (a). Vi betragter $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved

$$T(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_2 + \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_3.$$

(b) Efterses at T er lineær. Bestem matricen for T med hensyn til basen O .

[NB: Opgaven kan regnes også selv om (a) ikke er besvaret]

(c) Redegør for at der gælder

$$\text{rang}T > \text{rang}(T \circ T) > \text{rang}(T \circ T \circ T)$$

og

$$\text{null}T < \text{null}(T \circ T) < \text{null}(T \circ T \circ T).$$

null er dimensionen af kernen!
